Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

ӘОЖ 519:216 Қолжазба құқығында

Сулейменова Зоя Изтелеуовна

Кейбір кездейсоқ параболалық теңдеулер мен теңдеулер жүйелері шешімдерінің асимптотикалық беталыстары және оларды орталандыру сұрақтары туралы

8D05401 – Математика

Философия докторы (PhD) дәрежесін
алу үшін дайындалған диссертация

Отандық ғылыми кеңесші:
Есептеу ғылымдары және статистика кафедрасының
доценті, ф.-м.ғ.к., Ақанбай Н.
әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті

Шетелдік ғылыми кеңесші:
Америка математикалық қоғамының құрметті мүшесі,
профессор С.А.Молчанов
Шарлоттадағы Солтүстік Каролина университеті (АҚШ)

Қазақстан Республикасы
Алматы, 2026

МАЗМҰНЫ

КІРІСПЕ 4

1 ЫҚТИМАЛДЫҚТАР ТЕОРИЯСЫНЫҢ КЛАССИКАЛЫҚ ЕМЕС ОРТАЛЫҚ ШЕКТІК ТЕОРЕМАЛАРЫНЫҢ КЕЙБІР НҰСҚАЛАРЫ .. 40

1.1 Кейбір классикалық емес шектік теоремаларды Леви метрикасы терминінде және сипаттамалық функциялар әдісімен дәлелдеу 41

2 КЕЙБІР ПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН КОШИ ЕСЕБІ ШЕШІМДЕРІНІҢ ЫҚТИМАЛДЫҚТЫҚ ЖАЗЫЛЫМДАРЫ, АСИМПТОТИКАЛЫҚ БЕТАЛЫСТАРЫ ЖӘНЕ ОРТАЛАНДЫРЫЛУЛАРЫ 52

2.1 Параболалық теңдеулер үшін Коши есебі шешімдерінің ықтималдықтық жазылымдары және олардың қолданылымдары 52

2.1.1 $u(t,x) = M_x[\Phi(W_t)exp\{I_2(t)\}exp\{I_3(t)\}]$ шартты математикалық күтімі үшін дифференциалдық теңдеу 52

2.1.2 $I_1(t)$, $I_2(t), I_3(t)$ функционалдарының бірлескен сипаттамалық функциясы үшін теңдеу 57

2.1.3 а) $I(t) = \int_0^t sign\, W_s dW_s$ функционалының үлестірімі 58

2.1.3 б) $W_t + \int_0^t sign\, W_s dW_s$ функционалының үлестірімі 61

2.2 Кейбір кездейсоқ параболалық теңдеулер шешімдерінің ықтималдықтық жазылымдары және асимптотикалық беталыстары 63

2.2.1 Оң жағы кездейсоқ параболалық теңдеулер үшін Коши есебі шешімінің ықтималдықтық жазылымдары 63

2.2.2 «Ақ шу» типтес процесс арқылы ұйтқытылған жылу өткізгіштік теңдеуі үшін Коши есебі шешімінің асимптотикалық үлестірімі және асимптотикалық беталысы туралы 67

2.2.3 Оң жағы «Ақ шу» типтес процесс арқылы ұйытқытылған жылу өткізгіштік теңдеуі үшін Коши есебі шешімінің асимптотикалық нормалдылығының стохастикалық дифференциал терминіндегі дәлелдеуі .. 70

3 КЕЗДЕЙСОҚ ОРТАЛАРДАҒЫ МАГНИТ ӨРІСІ ТЕОРИЯСЫНЫҢ КЕЙБІР АРНАУЛЫ СҰРАҚТАРЫ 75

3.1 Стохастикалық мультипликативтік интерал үшін Ферстенберг типтес теорема 75

3.1.1 Марковтық сызықтық модельдегі магнит өрісі 80

3.1.2 Хермендер теоремасы және кейбір көмекші нәтижелер 85

3.1.3 Хермандер теоремасының қолданылулары 90

3.1.4 Диффузиялардың Хермандер типті генераторлармен байланыстылығы 91

3.1.5 «Ферстенберг типтес» теорема 97
3.2 Дискретті кинематикалық динамо, моменттер және фазалық ауысу 100
3.2.1 Физикалық кіріспе 100
3.2.2 Дискретті модельдің сипаттамасы 104
3.2.3 Екінші моментті талдау 112
ҚОРЫТЫНДЫ 116
ӘДЕБИЕТТЕР 118

КІРІСПЕ

Жұмыстың жалпы сипаты. Диссертациялық жұмыста ғылыми жаңалығы, теориялық маңыздылығы бар түпнұсқа ғылыми нәтижелер ұсынылған. Ұсынылып отырған диссертациялық жұмыс негізінен теориялық сипатқа ие. Қазіргі заманғы стохастикалық анализдің әдістері мен нәтижелері (сипаттамалық және ілесе жүруші үлестірімдер әдісі, кездейсоқ процестер теориясы мен дербес туындылы теңдеулер теорияларының байланысы, стохастикалық дифференциалдық теңдеулер теориясы, дифференциалдық теңдеулер әдісі, мультипликативтік интегралдар теориясы т.с.с.) кеңінен қолданылған және жұмысты жазу барысында сығылмайтын ағындағы магнит эволюциясы жаңа модельдер (марковтық сызықтық модель, кинематикалық динамоның дискретті моделі) аясында зерттелген әрі осы модельдер аясында маңызды жаңа нәтижелер алынған.

Тақырыптың өзектілігі. Ол зерттелініп отырған кездейсоқ құбылыстардың математикалық модельдерін құрастыруда және зерттеудің стохастикалық бағытына жататындығында. Диссертация тақырыбында қамтылған зерттеулердің қажеттілігі физиканың, гидромеханиканың, реттелмеген құрылымдар теориясының қазіргі заманғы сұраныстарынан пайда болды**.**

Диссертациялық жұмыстың мақсаты. Классикалық емес шектік теоремалардың жаңа нұсқаларын дәлелдеу; Кейбір кездейсоқ параболалық теңдеулердің шешімдерінің процесс траекториясы бойымен алынған шартты математикалық күтімдер терминдеріндегі жазылымдары туралы теоремаларды дәлелдеу, шешімдердің асимптотикалық нормалдылығын дәлелдеу және дельта– корреляцияланған ағындағы жылу өткізгіштік теңдеуін орталандыру; Стохастикалық мультипликативтік интеграл үшін Ферстенберг типтес теореманы дәлелдеу; Марковтық сызықтық модельдегі магнит өрісі эволюциясын зерттеу; Дискретті кинематикалық динамо моделін анықтау және бұл модельдегі Ляпуновтың жоғарғы көрсеткіші үшін айқын формулала алу және фазалық өту құбылысы орын алатындығын дәлелдеу.

Зерттеу нысаны. Тәуелсіз кездейсоқ шамалардың қосындылары; Параболалық теңдеулер шешімдерінің теңдеу арқылы анықталатын кездейсоқ процесстің траекториясы бойымен алынған шартты математикалық күтімдері арқылы жазылымдары және шешімдерді осы жазылымдарды пайдаланып зерттеу; Сығылмайтын сызықты марковтық жылдамдық ағыны, осы ағындағы магниттік индукция теңдеуі және теңдеумен байланысты анықталған марковтық стохастикалық мультипликативтік интеграл (матрицант) үшін Ферстенберг типтес теорема; Кинематикалық динамоның дискретті моделі және осы модельдегі магнит өрісі үшін фазалық ауысу құбылысы.

Зерттеу әдістері. Қолданылатын әдістер– ықтималдықтар теориясының сипаттамалық функциялар және ілесе жүруші үлестірімдер әдістері; кездейсоқ процестер теориясының дифференциалдық теңдеулер әдісі; мультипликативтік интегралдар теориясының әдістері; стохастикалық

дифференциалдық теңдеулер теориясының және кездейсоқ процесстер теориясының қазіргі заманғы әдістері.

Жұмыстың ғылыми жаңалығы.

Классикалық емес шектік теоремалардың бірнеше нұсқасы Леви ара қашықтығы терминінде, үлестірім функциялары кеңістігінде енгізілді. Сипаттамалық функциялар әдісі және ілесе жүруші үлестірімдер әдісі қолданылып, Линдеберг–Феллердің орталық шектік теоремаларының жалпыға бірдей жалпылануы көрсетілді. Классикалық орталық шектік теоремаларды маңызды түрде жалпылайтын жаңа тұжырымдар дәлелденді.

Параболалық теңдеулер мен олардың жүйелері инфинитезималдық операторлары кездейсоқ процесс ретінде анықталған теңдеулер ретінде қайта жазылды. Шартты математикалық күтімдер арқылы шешімдердің сипаттамалары көрсетілді. Лаплас түрлендірулері арқылы кейбір теңдеулердің шешімдері қарапайым тұрақты дифференциалдық теңдеуге келтірілетіндігі дәлелденді. «Ақ шу» типтес кездейсоқ процеспен ұйытқытылған параболалық теңдеудің шешімінің асимптотикалық нормалдылығы көрсетілді. Кездейсоқ параболалық теңдеулерді орталандыру жағдайында орташа температура және екі нүктедегі орташа температура өрістеріне сәйкес параболалық теңдеулер шығарылды.

Сығылмайтын сызықтық марковтық модель енгізіліп, магнит өрісінің эволюциясы үшін арнайы мультипликативтік стохастикалық интеграл (матрицант) алынған. Л.Хермандердің теориясы негізінде параболалық оператор мен қатаң оң өту тығыздығы бар кездейсоқ процестерге арналған Ферстенберг типтес теорема дәлелденді. Кинематикалық динамоның дискретті моделі ұсынылды, оның ықтималдық сипаттамасы зерттелді.

Магнит өрісінің Ляпунов көрсеткіштері мен моменттерінің нақты формулалары анықталды.

Магнит өрісінің энергиясының экспоненциалды өсу және кему аралықтары (фазалық өту құбылысы) анықталды. Магнит өрісінің динамикасы мен тұрақтылығын сипаттайтын жаңа стохастикалық модельдер мен нақты есептеу формулалары жасалды, Ферстенберг типтес теореманы магнит өрісіне қолдану тәжірибесі берілді.

Жұмыс апробациясы. Диссертациялық жұмыстың нәтижелері 15 ғылыми журналдарда жарияланды. Зерттеудің негізгі жағдайлары мен нәтижелері келесі ғылыми конференцияларда жарияланып талқыланған және АҚШ тың Солтүстік Каролина штатының Шарлотт университетінің математика департаментіндегі ғылыми семинарда, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті механика-математика факультеті «Математика» кафедрасының және «Есептеу ғылымдары және статистика» кафедрасының ғылыми семинарларында баяндама жасалынды және талқылаудан өтті.

- Талдау және қолданбалы математика бойынша үшінші халықаралық конференция. Математика және математикалық модельдеу институты. Алматы, Қазақстан. Тезистер жинағы, 201-бет. ICAAM 2016.

- Түркі әлемі математикалық қоғамының VI конгресі, 2–5 қазан 2017 ж. Астана, Қазақстан. Тезистер жинағы, 287–288-беттер. TWMS 2017.

- «Таза және қолданбалы математиканың өзекті мәселелері» атты халықаралық конференциясы. Алматы, 22–25 тамыз 2017 жыл, 87–88-беттер.

- «Қолданбалы математика, басқару және информатика» атты халықаралық ғылыми конференция, 3–5 қазан 2012 жыл, Белгород (Ресей). I том, 16–19-беттер.

- «Стохастикалық талдаудың өзекті мәселелері» атты ғылыми конференция, 2021 жылғы 20–21 ақпан, Ташкент, Өзбекстан, 113–116-беттер.

- Түркі әлемі математикалық қоғамының VI конгресі, 2–5 қазан 2017 жыл, Астана, Қазақстан. Тезистер жинағы, 286–287-беттер. TWMS 2017.

- «Математика, механика және информатиканың теориялық және қолданбалы мәселелері» атты халықаралық ғылыми конференция, 12–13 маусым 2019 жыл, Қарағанды, Қазақстан, 61–62-беттер.

- «Ықтималдықтар теориясы мен математикалық статистиканың шектік теоремалары» атты халықаралық конференция, 26–28 қыркүйек 2022 жыл, Ташкент, Өзбекстан, 8–10-беттер.

Жариялаулар. Зерттеудің негізгі нәтижелері рейтингтік журналдарда 3 жарияланым, ҚР БҒМ БҒССҚ ұсынған журналдарда 4 мақала, халықаралық конференция материалдарында 8 тезис жарияланды. Бірлескен жұмыстарда ғылыми кеңесшілер есептің қойылымын жасады, ал ізденуші теориялық нәтижелерді алып, олардың нәтижелерінің талдауын жасады.

Диссертация құрылымы және көлемі. Диссертациялық жұмыс 124 парақта жазылды. Жұмыс кіріспеден, үш бөлімнен, қорытындыдан, қолданылған әдебиеттер тізімінен (101 аталымнан) тұрады.

Жұмыстың қысқаша мазмұны.

Кіріспе бөлім зерттеу өзектілігіне, зерттеудің мақсатына, зерттелінетін есептердің математикалық модельдеуіне, қорғауға ұсынылатын нәтижелерге, зерттеу нысанына, алынған нәтижелердің ғылыми жаңалығына және олардың теориялық-практикалық құндылығына, сондай-ақ апробацияларға, автордың жарияланымдарына, диссертациялық жұмыстың мазмұнына, қорытындыға шолу жасаудан тұрады.

Бөлім I. «Ықтималдықтар теориясының классикалық емес орталық шектік теоремаларының кейбір нұсқалары».

Қазіргі заманғы ықтималдықтар теориясының оның ең үлкен, мүмкін практикалық қолданылымдар үшін ең маңызды бөлігін, оның шектік теоремалар деп аталатын бағыты құрайды.

Ықтималдықтар теориясының алғашқы шектік теоремалары (үлкен сандар заңы, Муавр – Лаплас, Пуассон теоремалары) кездейсоқ шамалардың қосындыларының үлестірім функциялары болатын $F_n(x)$ функциялары үшін сәйкес өрнектерді тауып жазып, сосын сол өрнектерді құрайтын қосындыларды жуықтап есептеп, тікелей асимптотикалық анализ жасауға арналды. Сосынғы белгілі шектік теоремалар атақты Чебышев теңсіздігіне негізделген шектік теоремалар болды (Чебышев теоремасы және т.б.). Ары

қарай П.Л.Чебышев ұсынған (А.А.Марков жетілдірген), кейінірек «моменттер әдісі» деген атпен аталып кеткен әдіс орталық шектік теорема (ОШТ) деп аталатын теоремалардың әртүрлі нұсқаларын дәлелдеуге мүмкіндік берді.

Кейінірек, 1900 жылдары, А.М.Ляпунов шектік теоремаларды дәлелдеудің «сипаттамалық функциялар әдісі» деп аталатын әдісін ұсынды. Ықтималдықтар теориясының көптеген әртүрлі бағыттардағы шектік теоремалары тікелей осы әдісті қолдану арқылы алынғаны белгілі. Бұл әдіс тек тәуелсіз ғана емес, кейбір арнайы тәуелділіктерге бағынатын кездейсоқ шамалар тізбектері үшін де шектік теоремалардың әртүрлі нұсқаларын дәлелдеуге жол ашты. Атай кетелік, сипаттамалық функциялар әдісі бойынша ОШТ дәлелдеген кездегі негізгі қойылатын талап – ол қосылғыштардың (кездейсоқ шамалардың) *бірқалыпты шексіз аздығы* туралы шарт.

Шектік теоремалар бағытындағы ары қарайғы көптеген өте маңызды нәтижелер 20 ғасырдың аса көрнекті математиктері Д.Пойа, П.П.Леви, Б.Финетти, А.Н.Колмогоров, А.Я.Хинчин, Б.В.Гнеденко т.б. аттарымен байланысты.

Біздің алға қойған мақсатымызға - бұл диссертациямыздың бірінші бөлімінде тек орталық шектік теоремаларға қатысты сұрақтармен айналысатынымызға байланысты, біз Кіріспенің бұл бөлігінде тек *классикалық* (яғни тәуелсіз кездейсоқ шамалардың қосындыларының әрбір мүшесінің дисперсиясы (әрбір мүшесі) бірқалыпты шексіз аздық шартын қанағаттандыратын) ОШТ-ға қатысты қысқаша мәліметтер келтірумен, дәлірек айтсақ ОШТ- ның жалпы, *Линдеберг– Феллер теоремасы* деп аталатын теоремасының әртүрлі нұсқаларының жазылымдарына байланысты белгілі нәтижелерді келтірумен [1-12] және *классикалық емес* (жоғарыда айтылған бірқалыпты шексіз аздық шарттары талап етілмейтін) шектік теоремаларға қатысты [13-23] бізге қажетті мәліметтерді пайдалана отырып, өзіміз [24-26] жұмыстарда қарастырған есептердің қойылымдарын және алынған нәтижелердің қысқаша баяндауларымен шектелеміз.

Орталық шектік теоремалар (ОШТ). Алдымен осы тақырыпқа қатысты кездейсоқ шамалар тізбектері мен үлестірімдерінің әлсіз (үлестірім бойынша) жинақталуларына байланысты белгілі нәтижелерге қысқаша шолу жасалынған.

Сипаттамалық функциялар үшін үзіліссіздік теоремасына негізделген, тәуелсіз кездейсоқ шамалардың қосындысының үлестірім функциясының қосынды саны шексіздікке ұмтылған кездегі әлсіз шегін табудың орнына осы қосындының сипаттамалық функциясының әр нүктедегі шегін тауып, осы шектік функцияның сипаттамалық функция болатындығы негізінде қосындының шектік үлестірім заңы туралы қандай да бір тұжырымдар алу әдісі **сипаттамалық функциялар әдісі** деп аталатыны белгілі.

Төменде келтірілетін белгілі шектік теоремалар осы тұжырымдалған сипаттамалық функциялар әдісімен оңай дәлелденетін шектік теоремалар.

Теорема (Линдеберг – Феллердің шектік теоремасы, қысқаша Орталық шектік теорема (ОШТ)). Айталық, $\xi_1, \xi_2, \ldots$ - тәуелсіз кездейсоқ шамалар

тізбегі, $M\xi_k = a_k,\ \ 0 < D\xi_k = \sigma_k^2 < \infty$ (ақырлы), $F_k(x) -\ \ \xi_k$ кездейсоқ шамасының үлестірім функциясы,

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n, \quad DS_n = D_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2,$$

$$\tilde{S}_n = \frac{S_n - MS_n}{\sqrt{DS_n}} = \frac{S_n - \sum_{k=1}^{n} a_k}{D_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_k - a_k}{D_n}$$

болсын.

Онда, егер келесі **Линдеберг шарты**: кез келген $\varepsilon > 0$ үшін $n \to \infty$ кезде

$$L_n(\varepsilon) = \frac{1}{D_n^2} \sum_{k=1}^{n} M\left((\xi_k - a_k)^2 I_{\{|\xi_k - a_k| > \varepsilon D_n\}}\right) \to 0, \qquad n \to \infty\,, \qquad (L_0)$$

яғни

$$L_n(\varepsilon) = \frac{1}{D_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{\{x:|x-a_k|>\varepsilon D_n\}} (x - a_k)^2 dF_k(x) \to 0, \qquad n \to \infty, \qquad (L_0^*)$$

шарты орындалса (мұндағы $I_A - A$ оқиғасының индикаторы: $I_A = 1$, егер A оқиғасы пайда болса; $I_A = 0$, кері жағдайда), онда $\xi_1, \xi_2, \ldots$ кездейсоқ шамалар тізбегі үшін (ОШТ) орындалады (тізбек орталық шектік теоремаға (ОШТ) бағынады):

$$\tilde{S}_n = \frac{S_n - MS_n}{\sqrt{DS_n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_k - a_k}{D_n} \overset{ac.}{\sim} \mathcal{N}(0,1). \qquad \text{(ОШТ)}$$

Айтылғаннан (ОШТ) келесі (бірқалыпты) жинақталуға эквивалент болатындығы шығады: $n \to \infty$ кезде

$$F_{\tilde{S}_n}(x) = P\{\tilde{S}_n \le x\} \rightrightarrows \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du. \qquad \text{(ОШТ}')$$

ОШТ – ның *сериялар схемасы* үшін нұсқасын келтіре кетелік.

Егер

$$\xi_{k,n} = \frac{\xi_k - a_k}{D_n}\,, \quad \tilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_{k,n}\,, \quad F_{k,n}(x) = P\{\xi_{k,n} \le x\}$$

белгілеулерін енгізсек және $\xi_1, \xi_2, \ldots$ кездейсоқ шамаларының орнына *сериялар схемасындағы* кез келген тәуелсіз $\xi_{k,n},\ k = 1,2,\ldots,n,$ кездейсоқ шамаларын қарастырсақ, онда $M\xi_{k,n} = 0,\ \ \sum_{k=1}^{n} D\xi_{k,n} = 1$ және **Линдеберг шарты** (L_0) мына түрде жазылады:

Кез келген $\varepsilon > 0$ үшін

$$L_n(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n} M\left(\xi_{k,n}^2 I_{\{|\xi_{k,n}| > \varepsilon\}}\right) \to 0, \qquad n \to \infty, \qquad (L'_0)$$

яғни

$$L_n(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n} \int_{\{x:|x|>\varepsilon\}} x^2 dF_{k,n}(x) \to 0, \qquad n \to \infty, \qquad (L''_0)$$

жазылады және ОШТ былай тұжырымдалады:

ОШТ′. Егер Линдеберг шарты (L''_0) (яғни (L'_0)) орындалса, онда $n \to \infty$ кезде

$$F_{\tilde{S}_n}(x) \overset{W}{\to} \Phi(x),$$

яғни

$$F_{\tilde{S}_n}(x) = P\left\{\sum_{k=1}^{n} \xi_{k,n} \le x\right\} \rightrightarrows \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du. \qquad (\text{ОШТ}')$$

ОШТ′′. Егер Линдеберг шарты (L'_0) орындалса, онда $n \to \infty$ кезде

$$\tilde{S}_n \overset{ac.}{\sim} \mathcal{N}(0,1), \text{ немесе } \tilde{S}_n \overset{d}{\to} \xi \sim \mathcal{N}(0,1).$$

ОШТ′салдарлары. Егер Линдерберг шарты (L'_0) орындалса, онда:

1) $D\xi_{k,n}$ *дисперсиялары бірқалыпты шексіз аз болады*:

$$\max_{k \le n} D\xi_{k,n} \to 0 \ (n \to \infty). \qquad (U)$$

2) $\xi_{k,n}$ тізбегі *бірқалыпты шексіз аз* (*елеместей аз*) тізбек: кез келген $\varepsilon > 0$ үшін $n \to \infty$ кезде

$$\max_{k \le n} P\{|\xi_{k,n}| > \varepsilon\} \to 0\,. \qquad (S)$$

Теорема (*сериялар схемасы үшін* ОШТ). Егер тәуелсіз кездейсоқ шамалар тізбегі $\{\xi_{k,n}\}_{k=1}^{n}$, $n = 1,2,\ldots,$ Линдеберг шартын қанағаттандырса, онда бұл тізбек үшін (ОШТ) (яғни, (ОШТ′)) орындалады: $n \to \infty$ кезде

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_{k,n} = \tilde{S}_n \overset{d}{\to} \xi \sim \mathcal{N}(0,1) \quad \left(P\{\tilde{S}_n \le x\} \rightrightarrows \Phi(x)\right).$$

Линдеберг – Феллер теоремасы Линдеберг шарты орталық шектік теорема орындалуы үшін *жеткілікті шарт* болатынын көрсетеді. Бірақ қосымша дисперсияның бірқалыпты шексіз аздық шарты (U) орындалған жағдайда Линдеберг шарты *қажетті* шартқа айналады екен.

Басқаша айтқанда, Линдеберг–Феллер теоремасын мынандай логикалық схема түрінде жазуға болады:

Теорема (Линдеберг – Феллер).

$$(\text{U})\,\&\,(\text{ОШТ}') \Leftrightarrow (L'_0). \qquad (LF)$$

Белгілі Чебышев теңсіздігі бойынша, кез келген $\varepsilon > 0$ үшін

$$P\{|\xi_{k,n}| > \varepsilon\} \le \frac{D\xi_{k,n}}{\varepsilon^2},$$

ал бұл (U) шартынан (S) шарты шығатынын көрсетеді: (U) ⇒ (S).

Бұған қосымша, *тәуелсіз бірдей үлестірілген* кездейсоқ шамалар тізбегі үшін (U) шарты автоматты түрде орындалатынын атай кетелік. Сонымен, бұл жағдайда (U) қатынасы шарт болмайды, демек (ОШТ′) ⇔ (L'_0):

Тәуелсіз бірдей үлестірілген кездейсоқ шамалар тізбегі үшін орталық шектік теорема (ОШТ) орындалуы үшін Линдеберг шартының орындалуы *қажетті және жеткілікті.*

Егер (S) шарты орындалса, яғни $\xi_{k,n}$ тізбегі *бірқалыпты шексіз аз* (*елеместей аз*) тізбек болса, онда $\xi_{k,n}$ тізбегі $n \to \infty$ кезде ықтималдық бойынша 0 (нөлге) ұмтылатын тізбек: $\xi_{k,n} \xrightarrow{P} 0$ $(n \to \infty)$.

Қазіргі уақытта тәуелсіз кездейсоқ шамалардың қосындылары үшін қосылғыштардың бірқалыпты шексіз аздығы шарты ((S) шарты) орындалатындығы талап етілген кездерде дұрыс болатын шектік теоремаларды ықтималдықтар теориясының *классикалық шектік теоремалары* деп, ал қосылғыштардың бірқалыпты шексіз аздығы шарты талап етілмейтін шектік теоремаларды *классикалық емес шектік теоремалар* деп атау қалыптасқан.

Классикалық шектік теоремаларға қатысты кейбір жаңа нәтижелерді [15,16] жұмыстардан қарауға болады. Егер классикалық емес шектік теоремаларға келсек [17-24], бұл жағдайда (S) шарты орындалмайды және шектік үлестірімдер класын табу туралы есептің тривиалды шешімі бар: кез келген $F(x)$ үлестірімі (үлестірім функциясы) $\tilde{S}_n$ қосындысының шектік үлестірімі болуы мүмкін (ол үшін $P(\xi_{1,n} \le x) = F(x)$; $\xi_{k,n} \equiv 0,\ k \ge 2,$ деп алу жеткілікті). Сондықтан кездейсоқ шамалар тізбегінің қандай да бір шектік үлестірімге жинақталатындығы туралы теоремаларды дәлелдеу барысында (S) шартының орындалуын *талап ету міндетті емес.* Оның үстіне тәуелсіз қосылғыштарды қосу схемаларында үлестірімдердің өздерімен жұмыс істеу және шектік теоремалардың шарттарын тікелей үлестірімдерге сүйенетін шектеулер арқылы тұжырымдау көбіне ыңғайлы болатыны да жалпы белгілі.

Біздің диссертациямыздың «**Ықтималдықтар теориясының классикалық емес орталық шектік теоремаларының кейбір нұсқалары»** атты бірінші бөлімі жоғарыдағыдай анықталған классикалық емес шектік теоремалардың кейбір нұсқаларын *Леви метрикасы* және сипаттамалық функциялар тізбектерінің жинақталуы терминдерінде тұжырымдалған шарттар аясында дәлелдеуге арналған және бұл тараудың материалдары [24] жұмысқа негізделген (сонымен бірге [23, 25, 26] жұмыстардың кейбір нәтижелері ішінара пайдаланылған).

Айталық

$$\xi_{n1},\ \xi_{n2}, \dots,\ \xi_{nn}, \dots \qquad (0.1.1)$$

тәуелсіз кездейсоқ шамалар тізбегі, $F_{nj}(x) = P(\xi_{nj} < x),\ j = 1,2, \ldots,$ $S_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \cdots,$ $F_n(x) = P(S_n < x) = F_{n1} * F_{n2} * \ldots * \ldots,$ мұндағы $*$ - үйірткі амалы, $\Phi(x) -$ стандарт нормал кездейсоқ шаманың үлестірім функциясы болсын. S_n қосындысындағы қосылғыштардың саны ақырлы болуы да, ақырсыз (шексіз) болуы да мүмкін. Соңғы жағдайда S_n қатарын тәуелсіз кездейсоқ шамалардың әлсіз жинақталу мағынасында жинақталатын қатары ретінде түсінеміз.

Үлестірім функциялары кеңістігінде $F(x)$ пен $G(x)$ үлестірім функцияларының ара қашықтығын беретін *Леви метрикасы* ($L-$метрика) мына қатынаспен анықталады [7]:

$$L(F,G) = \inf\{\varepsilon: F(x-\varepsilon) - \varepsilon \le G(x) \le F(x+\varepsilon) + \varepsilon; x \in R\},$$

және $L(.,.)$ қашықтығы үлестірімдердің әлсіз жинақталу топологиясын метрикалайтыны белгілі.

Теорема ([7, 38 - бет]. (0.1.1) тізбегі орталық шектік теоремаға (ОШТ) бағынуы үшін

$$\lim_{n\to\infty} L(F_n, \Phi) = 0 \qquad (0.1.2)$$

шартының орындалуы *қажетті және жеткілікті*.

Біздің дисертациямызда мынадай теоремалар дәлелденген [24].

Теорема 1.1.1 (0.1.1) кездейсоқ шамалар тізбегінің математикалық күтімдері нөлге $(M\xi_{nj} = 0)$ тең, дисперсиялары $M\xi_{nj}^2 = \sigma_{nj}^2$ ақырлы және

$$\sum_j \sigma_{nj}^2 = 1 \qquad (0.1.3)$$

болсын.

Онда $L(F_n, \Phi) \to 0$ жинақталуы, яғни ОШТ орындалады *сонда және сонда ғана*, егер келесі екі шарт орындалса:

а)

$$\alpha_n = \sup_j L(F_{nj}, \Phi_{nj}) \to 0\ (n \to \infty), \qquad (0.1.4)$$

мұндағы $\Phi_{nj}(x) = \Phi(x/\sigma_{nj})$;

б) кез келген бекітіліп қойылған (әрбір) $\varepsilon > 0$ үшін

$$L_n(\varepsilon) = \sum_{j\in A_n} \int_{|x|\ge\varepsilon} x^2 d(F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)) \to 0\ (n \to \infty), \qquad (0.1.5)$$

мұндағы A_n жиыны $\sigma_{nj}^2 \le \sqrt{\alpha_n}$ теңсіздігін қанағаттандыратын j индекстерінің мәндерінен ғана тұрады:

$$A_n = \{j:\ \sigma_{nj}^2 \le \sqrt{\alpha_n}\}. \qquad (0.1.6)$$

Келесі тұжырымдалатын теорема 1.1.2 Леви метрикасына негізделген және сипаттамалық функциялар әдісін қолдану арқылы дәлелденген.

Мынандай белгілеулер енгізейік:

$$f_{nj}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_{nj}(x); \qquad f_n(t) = Me^{itS_n} = \prod_j f_{nj}(t),$$

$$\varphi_{nj}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\Phi_{nj}(x) = e^{-\frac{\sigma_{nj}^2 t^2}{2}}, \qquad j = 1,2,\dots; \quad \varphi_n(t) = \prod_j \varphi_{nj}(t).$$

Бірден айта кетелік, (0.1.3)- қатынастан $\varphi_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ болатынын көреміз.

Теорема 1.1.2. Айталық, теорема 1.1.1-дің шарттары орындалсын.

Онда $L(F_n, \Phi) \to 0$, яғни ОШТ тұжырымындағы шектік жинақталу орындалады, яғни (0.1.1) тізбегі ОШТ- ға бағынады *сонда тек сонда ғана*, егер $n \to \infty$ кезде келесі екі шарт орындалса:

1) кез келген $T > 0$ үшін

$$\sup_j \sup_{|t| \le T} \left| f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t) \right| \to 0. \qquad (0.1.7)$$

2) әрбір оң T үшін

$$\sup_{|t| \le T} \sum_{j \in A_n} \left| f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t) \right| \to 0, \qquad (0.1.8)$$

Ары қарай, теорема 1.1.2- нің дәлелдеуіне аздаған қажетті өзгерістер енгізу арқылы, 1) және 2) шарттары біріктірілген келесі теорема 1.1.3 дәлелденген.

Теорема 1.1.3. Айталық (0.1.3) шарты орындалсын.

Онда $L(F_n, \Phi) \to 0$ жинақталуы, яғни ОШТ орындалуы үшін кез келген $T > 0$ үшін $n \to \infty$ кезде

$$\sup_{|t| \le T} \sup_j \left| f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t) \right| \to 0, \qquad (0.1.9)$$

шегі орындалуы қажетті және жеткілікті.

Теорема 1.1.2 белгілі Линдеберг-Феллердің классикалық теоремасын маңызды түрде жалпыландырады. Идеялық тұрғыдан алғанда теорема 1.1.2-нің ықтималдықтық мағынасы мынаған келтіріледі: алдын – ала (теорема 1.1.1 сияқты) бірқалыпты шексіз аздық шартын қанағаттандыратын кездейсоқ шамалар тізбекшесі (ішкі тізбегі) бөлініп алынады, сосын ол (тізбекше) үшін Линдебергтің классикалық шарты тексеріледі, сосын алынған нәтиже жалпы тізбекке көшіріледі.

Диссертациялық жұмыстың **«Кейбір параболалық теңдеулер үшін Коши есебі шешімдерінің ықтималдықтық жазылымдары, асимптотикалық беталыстары және орталандырылулары»** деп аталатын екінші бөлімінде ықтималдықтар теориясының және кездейсоқ процестер теориясының кейбір арнайы тақырыптарының белгілі нәтижелері пайдалынатын болғандықтан, алдымен бұл бөлімдегі жалпы ықтималдықтар теориясына қатысты мәліметтер [2-5] әдебиеттерінің желісімен баяндалған, ал параболалық теңдеулерге қатысты белгілі нәтижелер [27-28] әдебиеттерінен алынған.

Ал жалпы *кездейсоқ процестерге* байланысты келесі маңызды мәліметтер [29-33] әдебиеттерге, ал біз үшін аса маңызды Винер процесі (броундық қозғалыс) үшін қажетті нәтижелер [34-37] әдебиеттерге сүйене отырып баяндалған.

Қазір тек солардың кейбір, біз үшін аса маңыздыларына ғана қысқаша тоқталайық.

Айталық, ξ_t, $t \in R_+ = [0,\infty)$, - $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған және мәндерін $(R, \beta(R))$ кеңістігінде қабылдайтын кездейсоқ процесс болсын. Онда әрбір $t \geq 0$ үшін ξ_t процесі арқылы пайда болған

$$\mathcal{F}_{\leq t} = \sigma\{\xi_s, s \leq t\} = \big\{\{\xi_s \in B\}: s \leq t, B \in \beta(R)\big\},$$

σ −алгебрасы ξ_s кездейсоқ процесін $s \leq t$ уақыт аралығында бақылау нәтижесінде пайда болуын білуге болатын барлық оқиғалардың жиынтығы ретінде анықталады. $\mathcal{F}_{\geq t} = \sigma\{\xi_s, s \geq t\}, \mathcal{F}_{[s,t]} = \sigma\{\xi_u,\ s \leq u \leq t\}, \mathcal{F}_{=t} = \sigma(\xi_t)$ сигма – алгебралары ұқсас түрде анықталады, мәселен $\mathcal{F}_{=t}$ – бұл (бекітіліп қойылған t үшін) ξ_t кездейсоқ шамасы арқылы пайда болған σ −алгебра.

Егер кез келген $A \in \mathcal{F}_{\leq t}$, $B \in \mathcal{F}$ оқиғалары үшін үшін ақиқат дерлік (а.д.) түрде

$$P(AB/\mathcal{F}_{=t}) = P(A/\mathcal{F}_{=t})P(B/\mathcal{F}_{=t}) \qquad (0.2.1.1)$$

теңдігі орындалатын болса, онда ξ_t процесі *марковтық процесс* (немесе *Марков процесі*) деп аталады.

$P(s,x,t,\Gamma)$ арқылы s уақыт сәтінде x нүктесінде болған марковтық процестің t $(t \geq s)$ уақыт сәтінде $\Gamma \in \beta(R)$ жиынына түсу (өту, көшу) ықтималдығы белгіленеді:

$$P(s,x,t,\Gamma) = P\{\xi_t \in \Gamma/\xi_s = x\}.$$

және бұл ықтималдық марковтық процестің *өту ықтималдығы* деп аталады (дәлірек айтсақ, сол жақтағы өту ықтималдығы – ол оң жақтағы шартты ықтималдықтың нұсқаларының бірі).

Егер барлық s, x, t, $s < t$, үшін

$$P(s,x,t,\Gamma) = \int_R p(s,x,t,y)dy$$

шартын қанағаттандыратын (теріс емес) $p(s,x,t,y)$ функциясы табылатын болса, онда мұндай функция Марков процесі ξ_t - ның *өту тығыздығы* деп аталады (бұл жағдайда dy, мәселен, Лебег өлшемі).

Егер $P(s,x,t,\Gamma)$ өту функциясы $s,t \in R_+ = [0,\infty)$ үшін анықталса және ол уақыттық өс бойынша жылжытқаннан өзгермейтін болса, яғни

$$P(s+h,x,t+h,\Gamma) = P(s,x,t,\Gamma),$$

болса, онда мұндай өту функциясы *біртекті (стационар) өту функциясы* деп, ал сәйкес процесс *біртекті (стационар) Марков процесі* деп аталады.

Біртекті өту функциясы тек $t-s \in R_+$ айырымына ғана тәуелді және біртекті Марков процесі үшін жоғарыдағы шартты қанағаттандыратын үш аргументтен ғана тәуелді $P(x,t,\Gamma)$ функциясын енгізуге болады.

$\boldsymbol{B}$ арқылы сан түзуінде анықталған барлық шенелген $\beta(R)$ - өлшенетін $f(x)$ сандық функцияларының жиынын белгілейік және $\boldsymbol{B}$-дағы норманы былайша анықталық: $\|f\| = \sup_{x\in R}|f(x)|$ (бұл норма мағынасындағы жинақталу– бірқалыпты жинақталу).

Біртекті өту функцияларына бір параметрден ғана тәуелді келесі P^t операторлар үйірін сәйкес қоюға болады: $f \in \boldsymbol{B}$ үшін

$$P^t f(x) = \int_R f(y)\, P(t,x,dy).$$

P^t операторлар үйірі $P^0 = E$ *бірлік* операторын қамтитын операторлардың *жартылай группасы* (қысқаша: жартылай группа) болады.

Біртекті Марков процесі үшін P^t операторларының ықтималдықтық мағынасы:

$$P^t f(x) = M_x f(\xi_t) = M(f(\xi_t)/\xi_0 = x),$$

мұндағы M_x белгілеуі (операторы) ξ_t процесінің бастапқы $t=0$ уақыт сәтінде x нүктесінен шығатын $(\xi_0 = x)$ барлық траекториялары бойынша алынған шартты математикалық күтім алуды білдіреді.

P^t жартылай группасының **инфинитезималдық операторы** A былайша анықталады:

$$Af(x) = \lim_{t\downarrow 0} t^{-1}\left(P^t f(x) - f(x)\right), f \in \boldsymbol{B}.$$

Сонымен, Af – бұл $P^t f$-тің нөлдегі оң жақты туындысы, D_A – сызықтық ішкі кеңістік (тұйық кеңістік болуы міндетті емес), және A – сызықтық оператор.

Егер $f \in D_A$ болса, онда $P^t f \in D_A$ және

$$AP^t f = P^t Af = \frac{d}{dt}(P^t f).$$

Максимум принципі. Егер f функциясының x нүктесінде абсолют максимумы бар болатын болса (яғни, кез келген $y \in R$ үшін $f(x) \geq f(y)$ болса), онда $f \in D_A$ үшін $Af(x) \leq 0$.

Бұл принциптен, $\boldsymbol{B}$ кеңістігінде берілген P^t қысушы сызықтық операторлардың жартылай группасы 1 (бірді) өз орнында қалдыратын ($P^t 1 = 1$) болуы үшін $1 \in D_A$, $A1 = 0$ болуы *қажетті және жеткілікті* болатыны шығады.

Марковтық процестің инфинитезималдық операторы дифференциалдық оператор болатын болса, онда мұндай процестер әдетте *диффузиялық процестер* деп аталады. Диффузиялық процестердің инфинитезималдық операторлары A дәрежелері екінші реттен артық емес дифференциалдық операторлар ғана бола алады және ол операторларда туындысыз бос мүше болмау керек (өйткені $A1 = 0$).

Сонымен бірге максимум принципі бұл операторлардың коэффициенттеріне де шектеулер қояды: $||a_{ij}||$ матрицасы кез келген x үшін *теріс емес анықталған* матрица болуы керек. Осылайша, диффузиялық процестің инфинитизималдық операторы екінші ретті эллипстік оператор, немесе «ерекшеленген эллипстік», немесе параболалық (гиперболалық, тіптен бірінші ретті дифференциалдық) оператор болуы керек екен.

Диссертацияның бұл екінші бөліміндегі біздің мақсатымыз – орташа квадраттық мағынада жоғарыдағыдай түрде анықталған функционалдардың анықтамаларындағы интеграл астындағы функциялар уақыттық та, кеңістіктік те координаттардан тәуелді болатын жағдайлардағы бірлескен үлестірімдерін табу сұрақтары.

Сонымен бірге, дербес туындылы параболалық теңдеулер үшін Коши есебінің шешімі осы теңдеулермен байланысы бар сәйкес диффузиялық процестердің траекториялары бойынша алынған шартты математикалық күтімдерін табумен тығыз байланысты болатыны кездейсоқ процестер теориясынан белгілі. Бұл ретте кездейсоқ параболалық теңдеулер үшін олардың шешімдерінің асимптотикалық беталыстары (асимптотикалық нормалдылығы және т.б. қасиеттері) туралы сұрақтар көптеген жұмыстарда [38-47] зерттелгенін айта кетсек те жеткілікті.

Келесі бір маңызды сұрақ– бұл сәйкес кездейсоқ параболалық теңдеулерді орталандыру немесе теңдеудің шешімін орталандыру сұрақтары [48-57] және т.б. көптеген жұмыстарда қарастырылған. Диссертацияда біздің өз бетімізбен алған нәтижелеріміз [58 -65] жұмыстарда жарияланған.

Аталған бағыттағы белгілі нәтижелерге және диссертациямызда дәлелденген нәтижелерге қысқаша тоқталайық.

Теорема ([30]).

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = Au(t,x) + c(x)u(t,x) + h(x), \quad u(0,x) = u_0(x), \qquad (0.2.1.3)$$

Коши есебінің шешімін мынадай шартты математикалық күтім түрінде жазуға болады:

$$u(t,x) = M_x\left[exp\left\{\int_0^t c(\xi_s)ds\right\}u_0(\xi_t) + \int_0^t exp\left\{\int_0^s c(\xi_u)du\right\}h(\xi_s)ds\right], (0.2.1.4)$$

мұндағы M_x белгісі $t = 0$ бастапқы уақыт сәтінде $\xi_0 = x$ нүктесінен шығатын ξ_t процесінің барлық траекториялары бойынша алынған шартты математикалық күтімді білдіреді (әрине, мұнда c, g, u_0 функцияларына және A операторының анықталу облысына белгілі бір шарттар қою керек екені түсінікті, олар туралы диссертацияның сәйкес пунктінде айтылатын болады).

[29-32] әдебиеттерде бұл теорема $I_1(t) = \Phi(W_t)$, $I_2(t) = \int_0^t g(W_s)dW_s$, $I_3(t) = \int_0^t f(W_s)ds$, мұндағы $W_t, t \geq 0$ - (бір өлшемді) Винер процесі, $\Phi(x)$, $g(x)$, $f(x)$ – тек кеңістіктік координатқа тәуелді сандық функциялар, $I_1(t)$ – кездейсоқ процесс, $I_2(t)$ – кездейсоқ функциядан Винер процесі бойынша алынған Итоның стохастикалық интегралы, $I_3(t)$- кездейсоқ функциядан алынған (әдеттегі) стохастикалық интеграл (барлық интегралдар орташа квадраттық мағынадағы стохастикалық интегралдар ретінде түсініледі), функционалдарының бірлескен сипаттамалық функциясын табу үшін қолданылған.

Диссертациямыздың бұл бөлімінде алдымен біз [30, 32] жұмыстардың нәтижелерін жалпыландырамыз және бұл жұмыстардағы кейбір нәтижелерді g және f функциялары қосымша уақыттан да тәуелді болатын жағдайлар: $g = g(t,x), f = f(t,x), t \geq 0, x \in R$, үшін нақтылаймыз және дәлдендіреміз.

Бөлімнің 2.1.1. пунктінде Винер процестінің траекториясы бойымен алынған шартты математикалық күтімнің қасиеттерін пайдалану арқылы $u(t,x) = M_x[\Phi(W_t)exp\{I_2(t)\}exp\{I_3(t)\}]$ шартты математикалық күтімі үшін сәйкес дифференциалдық теңдеу жазылған. Атап айтқанда, мынадай жалпы түрдегі теорема дәлелденген.

Теорема 2.1.1. Мынадай функцияны (шартты математикалық күтімді) қарастырайық:

$$u(t,x) = M_x\left[\Phi(W_t)e^{\int_0^t g(t-s,W_s)dW_s} \cdot e^{\int_0^t f(t-s,W_s)ds}\right], \qquad (0.2.1.5)$$

мұндағы $W_t, t \geq 0, -$Винер процесі, M_x- белгісі бастапқы $t = 0$ уақыт сәтінде $x \in R$ нүктесінен шығатын Винер процесінің барлық траекториялары бойынша алынған шартты математикалық күтім: $M_x(\dots) = M\big((\dots)/W_0 = x\big)$, ал экспонентаның дәрежесіндегі (орташа квадраттық мағынадағы) интеграл - бұл сәйкесінше кездейсоқ функциядан Винер процесі бойынша алынған стохастикалық Ито интегралы және кездейсоқ функциядан алынған әдеттегі стохастикалық интеграл.

Қосымша $f(t,x)$, $g(t,x)$ және $\Phi(x)$ функциялары t мен x бойынша үзіліссіз және x бойынша өздерінің екінші ретті туындыларымен қоса алғанда шенелген функциялар болсын.

Онда (0.2.1.5) формуласымен анықталған $u(t,x)$ функциясы

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + g(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + \left[\frac{1}{2}g^2(t,x) + f(t,x)\right]u(t,x),$$
$$u(0,x) = \Phi(x), \qquad (0.2.1.6)$$

мұндағы $t \geq 0, x \in R = (-\infty, +\infty)$, параболалық теңдеуі үшін Коши есебінің (ықтималдықтық) шешімі болады, яғни (0.2.1.6) теңдеуінің шешімін (0.2.1.5) шартты математикалық күтімі түрінде жазуға болады.

Дәлелденген теорема 2.2.1 $I_1(t) = W_t$, $I_2(t) = \int_0^t g(t-s, W_s) d\, W_s$, $I_3(t) = \int_0^t f(t-s, W_s) ds$ функционалдарының бірлескен сипаттамалық функциясын қандай да бір дербес туындылы айқын параболалық теңдеудің шешімі ретінде табуға болатындығы туралы теореманы дәлелдеуге қолданылған.

Теорема 2.1.2. Егер $\varphi(t,x,z) = \varphi(t,x,z_1,z_2,z_3)$ функциясы $I_1(t)$, $I_2(t)$, $I_3(t)$ функционалдарының (шартты) бірлескен сипаттамалық функциясы болса, онда бұл функцияны мынадай дербес туындылы теңдеудің шешімі ретінде табуға болады:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varphi(t,x,z)}{\partial x^2} + iz_2 g(t,x)\frac{\partial \varphi(t,x,z)}{\partial x} +$$

$$+\left(iz_3 f(t,x) - \frac{z_2^2}{2} g^2(t,x) \right) \varphi(t,x,z), \qquad (0.2.1.7)$$

$$\varphi(0,x,z) = e^{ixz_1},$$

мұндағы $z = (z_1, z_2, z_3)$.

Бізге қажет $I_1(t), I_2(t), I_3(t)$ функционалдарының (шартсыз) бірлескен сипаттамалық функциясы $\varphi(t,0,z) = \varphi\big(t,0,z_1,z_2,z_3\big)$ болатыны айқын.

(0.2.1.7)- теңдеудің шешімін табу, жалпы жағдайда тіптен мүмкін емес. Сондықтан да біз диссертациямызда (0.2.1.7)- теңдеудің дербес жағдайын, g және f функциялары уақыт t–дан тәуелсіз болатын жағдайды, қарастырдық: $g(t,x) = g(x), f(t,x) = f(x)$. Онда (0.2.1.7)- теңдеудің бұл дербес жағдайына, t бойынша Лаплас түрлендіруін қолдану арқылы, бұл теңдеудің шешуін табу сұрағын әдеттегі (кәдуілгі) жай дифференциалдық теңдеудің шешімін табу мәселесіне келтірілген. Алынған нәтижелердің қолдану мысалдары ретінде біз $I(t) = \int_0^t sign\, W_s dW_s$ (2.1.2 а) пункті) және $W_t + \int_0^t sign\, W_s dW_s$ (2.1.2 б) пункті) функционалдарының үлестірімдері табылған.

Диссертацияның 2-бөлімінің «Кейбір параболалық теңдеулер шешімдерінің ықтималдықтық жазылымдары және асимптотикалық беталыстары» деп аталған 2.2 пунктінің 2.2.1 ішкі пунктінің негізгі нәтижесі – ол келесі

Теорема 2.2.3′. Параболалық теңдеу үшін келесі Коши есебін қарастырайық:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = Au(t,x) + c(t,x), \;\; u(0,x) = f(x), \qquad (0.2.1.8)$$

мұндағы $t \geq 0,\ x \in \mathbb{R},\ A$ – қандай да бір марковтық процесс ξ_t- ның инфинитезималдық операторы, $f(x), c(t,x)$– үзіліссіз шенелген (жалпы алғанда, кездейсоқ) функциялар,

Онда (0.2.1.8) есебінің жалғыз (t-ның сызықтық функциясынан жылдамырақ өспейтін) шешімін мынандай шартты математикалық күтім түрінде жазуға болады:

$$u(t,x) = M_x\left[f(\xi_t) + \int_0^t c(t-s,\xi_s)ds\right], \qquad (0.2.1.9)$$

мұндағы M_x белгілеуі ξ_t процесінің бастапқы $t=0$ уақыт сәтінде x нүктесінен шығатын барлық траекториялары бойынша алынған шартты математикалық күтіміді білдіреді.

Ары қарай жылу өткізгіштік теңдеуі үшін Коши есебінің ((2.1.5)– теңдеу) шешімі, (0.2.1.9) формула арқылы, Винер процесі траекториялары бойымен алынған шартты математикалық күтім терминінде жазылатыны туралы теорема (теорема 2.2.4) дәлелденген.

Теорема 2.2.4. Жылу өткізгіштік теңдеуі үшін келесі Коши есебін қарастырайық:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + c(t,x), \qquad u(0,x) = f(x), \qquad (0.2.1.10)$$

мұнда $t \geq 0,\ x \in \mathbb{R},\ f(x), c(t,x)$– үзіліссіз шенелген (жалпы алғанда, кездейсоқ) функциялар.

Онда (0.2.1.10) есебінің шешімін келесі шартты математикалық күтім түрінде жазуға болады:

$$u(t,x) = M_x\left[f(W_t) + \int_0^t c(t-s,W_s)ds\right], \qquad (0.2.1.11)$$

мұндағы $t \geq 0, x \in \mathbb{R}$, ал $f(x), c(t,x)$ – үзіліссіз және шенелген (жалпы алғанда, кездейсоқ) функциялар, ал M_x белгісі бастапқы $t=0$ уақыт сәтінде x нүктесінен шығатын W_t процесінің барлық траекториялары бойынша алынған шартты математикалық күтімді білдіреді.

Келесі 2.2.2 пунктте (0.2.1.10) теңдеуінің жеке жағдайы, «Ақ шу» типтес процесс арқылы ұйтқытылған

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + g(x)\dot{W}_t, \quad u(0,x) = f(x), \qquad (0.2.1.12)$$

теңдеуі қарастырылған, мұндағы $t \geq 0, x \in \mathbb{R},\ f(x),\ g(x) -$ шенелген үзіліссіз функциялар, $\dot{W}_t$ – «ақ шу»: $\dot{W}_t dt = dW_t$, және $t_1 < t_2$ үшін $\int_{t_1}^{t_2} \dot{W}_t\, dt = W_{t_2} - W_{t_1}$.

2.2.4- теореманы қолданып (0.2.1.12) теңдеуінің шешімін мына түрде жаза аламыз:

$$u(t,x) = M_x\left[f\left(\widetilde{W}_t\right) + \int_0^t g(\widetilde{W}_{t-s})\, dW_s\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)p(t,x,y)dy +$$

$$+\int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)p(t-s,x,y)dydW_s, \qquad (0.2.1.13)$$

мұндағы M_x таңбасы жаңа Винер процесі $\widetilde{W}_t$-ға қатысты алынған шартты математикалық күтім, $p(t,x,y)$ – $\widetilde{W}_t$ процесінің өту тығыздығы (жылу өткізгіштік теңдеуінің фундаменталдық шешімі).

(0.2.1.12)– теңдеудің шешімін ары қарайғы талдау осы (0.2.1.13) жазылым негізінде жүргізілген және бірқатар техникалық тұрғыдағы түрлендірулер қолданылып, Винер процесінің кейбір белгілі қасиеттерін пайдалану арқасында келесідей теорема дәлелденген.

Теорема 2.2.5. Айталық, $u(t,x)$ – (0.2.1.13) қатынасымен анықталған (оң жағы «ақ шу» типтес процеспен ұйытқытылған) параболалық теңдеу үшін Коши есебінің шешімі, $f(x)$, $g(x)$ үзіліссіз және шенелген функциялар, ал $u_0(t,x)-$ (0.2.1.13) есептің $g(x)=0$ болған жағдайдағы шешімі болсын.

Егер $|x|\to\infty$ кезде берілген $\sigma(x)=\sigma_1,\ x>0;\ \sigma(x)=\sigma_2,\ x<0,$ функциясы үшін $g(x)$ функциясы $|g(x)-\sigma(x)|\to 0$ шартын қанағаттандырса, онда

$$\frac{u(t,x)-u_0(t,x)}{\sqrt{t}} \overset{\text{ac.}}{\sim} \mathcal{N}\left(0,\frac{(\sigma_1+\sigma_2)^2}{4}\right), t\to\infty. \qquad (0.2.1.14)$$

Теореманың тұжырымын келесі түрде де жазуға болады: $t\to\infty$ кезде

$$u(t,x) \overset{d}{\to} u_0(t,x)+\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\sqrt{t}\,\xi, \qquad \xi\sim\mathcal{N}(0,1).$$

Екінші бөлімнің соңында жалпы температураөткізгіштік теңдеуін дельта – корреляцияланған ағын деп аталатын ағында орталандыруға қатысты бірқатар жаңа нәтижелер келтірілген.

Диссертациямыздың **«Кездейсоқ орталардағы магнит өрісі теориясының кейбір арнаулы сұрақтары»** деп аталған үшінші бөлімі екі ішкі бөлімщеден тұрады. Бөлімнің 3.1 пунктінде *марковтық сызықтық модель* деп аталған арнайы бір модельдегі магнит өрісінің эволюциясына байланысты сұрақтар қарастырылып, зерттеу барысында пайда болған бір арнайы түрдегі стохастикалық мультипликативтік интеграл (стохастикалық матрицант) үшін Ферстенберг типтес теорема дәлелденген және ол теорема аталған модельдегі магнит өрісінің асимптотикалық беталысын зерттеуге қолданылған. Бөлімнің келесі 3.2 пунктінде дискретті кинематикалық динамоның жаңа моделі енгізіліп, осы модельдегі магнит өрісі мен магнит өрісінің моменттері талданған.

Магнит өрісінің өткізуші сұйықтың турбулизацияланған ағынындағы эволюциясы туралы есеп көптеген физикалық қолданылымдардағы ең маңызды есептердің бірі болып табылатыны белгілі. Бұл жерде ең алдымен астрофизикалық қолданылымдар туралы айтуға болады. Бұл есептің физикалық және математикалық аспектілеріне көптеген жұмыстар арналған [66]-[78]. Бұл бағыттағы ең орталық және өзекті сұрақтардың бірі – ол индукция теңдеуі үшін Коши есебі шешімінің асимптотикалық беталысын

зерттеу туралы (математикалық тұрғыдан өте күрделі болып есептелетін) сұрақ.

Диссертациямыздың осы үшінші бөлімінде магнит өрісінің эволюциясы туралы есеп *кинематикалық қойылым* аясында, яғни берілген кездейсоқ жылдамдықтар өрісінің статистикалық сипаттамалары уақыт бойынша өзгермейді деп есептелетін, ал бірақ магнит өрісінің статистикалық сипаттамалары, жалпы алғанда, уақыт бойынша өзгеруі мүмкін деп ұйғарылатын қойылым тұрғысында зерттеледі.

Сонымен, кинематикалық қойылым аясында магнит өрісінің эволюциясы іс жүзінде түсінікті болғанмен, турбулентті сұйық ағынының өзін сипаттау мәселесі аса күрделі проблема болатыны белгілі. Сондықтан әдетте сұйық қозғалысын нендей де бір әдістермен модельдеуге тура келеді. Олардың ішінде жылдамдық уақыт бойынша аз уақыт аралықтарында жаңалатындық қасиетіне ие модель (*жаңаланатын модель*) мен уақыт бойынша *қысқа корреляцияланған* (*дельта– корреляцияланған*) [74-78] модель болатын жағдайларға арналған зерттеу жұмыстарын ерекше атай кетеміз. Мәселен, [77 - 78] жұмыстарда магнит өрісінің аса үлкен уақыттардағы асимптотикасы жылдамдықтың *сызықтық жаңаланатын моделі* деген модель жағдайында зерттелінген және бұл модель жағдайында есеп тәуелсіз кездейсоқ матрицалардың көбейтіндісінің шегінің асимптотикалық түрін табуға келтірілген және алынған нәтижелер сәйкес Ляпунов көрсеткіштері теориясы терминдерінде тұжырымдалған. Жалпы тәуелсіз кездейсоқ матрицалардың көбейтінділерін зерттеу сұрақтары Ферстенбергтің жұмыстарынан [79-80] басталған және бұл жұмыстарда тәуелсіз матрицалардың шексіз көбейтінділеріне қатысты бірқатар фундаментал нәтижелердің алғаш рет алынғанын атай кетелік. Бірқатар жұмыстар сызықтық жаңаланатын модельдің белгілі бір мағынада жалпыланған моделі жағдайындағы орталандырылған магнит өрісі мен магнит өрісінің жоғарғы ретті моменттерінің теңдеулерін сызықты [81-82] және *көп масштабты жылдамдықтар өрісі* деп аталатын жағдайда [83 -86] қорытуға және алынған теңдеулерді зерттеуге арналған.

Атай кетелік, жалпы ғылыми әдебиеттерде (кездейсоқ) матрицалардың көбейтіндісінің аға (жоғарғы) Ляпунов көрсеткішінің ақиқат дерлік (а.д.) қатаң оң болатыны туралы нәтижелерді «*Ферстенберг типтес*» теоремалар деп атау қалыптасқан.

3.1. Стохастикалық мультипликативтік интерал үшін Ферстенберг типтес теорема

Ферстенберг теоремасының классикалық нәтижелері қысқаша келесі түрде тұжырымдалады (төменде және бұдан былай қарай $SL(\nu, R)$ – ν –ші ретті унимодулярлы матрицалар группасы, $S^{\nu-1} - R^{\nu}$ кеңістігіндегі бірлік сфера, $E -$ бірлік матрица).

Теорема (Ферстенберг, [80]). Айталық,$A_1, A_2, \ldots$ - тәуелсіз бірдей үлестірілген кездейсоқ матрицалар тізбегі, $A_i \in SL(\nu, R)$, $A(n) = A_n \cdot A_{n-1} \cdot \ldots \cdot A_1 \quad (A(0) = E)$ болсын.

Бекітіліп қойылған $x_0 \in S^{\nu-1}$ және A_i тізбегі бойынша

$$x_n = A(n)x_0/\|A(n)x_0\|\,,\ n = 1,2,\ldots,$$

тізбегін, яғни (x_n, A_n) марковтық тізбесін, анықталық

Онда белгілі бір табиғи (әдетте орындалатын) шарттар орындалғанда Ляпуновтың *үлкен* (*жоғарғы*) *көрсеткіші* ақиқат дерлік (*а.д.*) бар және қатаң оң болады:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln\|A(n)x_0\| > 0.$$

Теоремада талап етілетін шарттар және γ -ны есептеу формулалары [80] және [87,88] жұмыстарда келтірілген. [89] жұмыста кездейсоқ Шредингер операторы үшін жеке, жолақтағы оператор, жағдайында Ляпуновтың барлық көрсеткіштері зерттелінген. [90] жұмыс та ұқсас сұрақтарды зерттеуге арналған. Тәуелсіз кездейсоқ матрицалардың көбейтіндісі үшін дәлелденген Ферстенбергтің нәтижелері [87] жұмыста марковтық матрицалар тізбесі үшін жалпыландырылған, яғни, егер $A_1, A_2, \ldots$ марковтық матрицалар тізбегі болса, онда жеткілікті жалпы шарттар орындалған жағдайда $A(n)$ тізбегі үшін Ляпуновтың жоғарғы көрсеткіші γ бар және қатаң оң болатыны дәлелденген. Марковтық тізбе құрайтын матрицалардың көбейтінділері үшін Ляпуновтың сипаттамалық көрсеткіштерінің спектрінің қарапайым, яғни әртүрлі, болатындық шарттары [91] жұмыста келтірілген. Жалпы Ляпуновтың жоғарғы көрсеткішінің бар болатындығы жоғарыдағы жұмыстардың барлығында дерлік мультипликативтік эргодикалық теорема деп аталатын теорема [92] негізінде тұжырымдалғанын айта кетеміз.

Диссертациямыздың үшінші бөлімінің алғашқы пунктіндегі біздің негізгі мақсатымыз – ол «Ферстенберг типтес» теореманың бір нұсқасын матрицалардың арнайы түрдегі көбейтіндісі жағдайы - марковтық кездейсоқ матрицалардың (стохастикалық) мультипликативтік интегралы (стохастикалық матрицанты) жағдайы үшін дәлелдеу, яғни [77-80, 87-89] жұмыстардың нәтижелерін стохастикалық мультипликативтік интегралдар жағдайына жалпыландыру.

Біз *стохастикалық мультипликативтік интеграл* деп атаған арнайы түрдегі мультипликативтік интегралды зерттеу үшін бізге жалпы мультипликативтік интегралдар теориясының бірқатар нәтижелерін пайдалануға тура келеді, сондықтан біздің диссертациямызда осы сұрақтардың бізге қажетті нәтижелері [93] монографияны және [94] жұмысты негізге ала отырып, қысқаша баяндалған.

Аталған сұрақтарға байланысты біздің алған нәтижелеріміз [96–100] жұмыстарда жарияланған, ал диссертациямызда біз оларды [98] жұмыс

негізінде баяндаймыз және [99- 100] жұмыстардың тек негізгі нәтижелерін ғана келтіретін боламыз.

3.1.1. Мультипликативтік интеграл

Берілген $A(t) = \|a_{ik}(t)\|_{i,k=1}^{n,n}$ *ерекше емес* матрицасы, мұндағы $a_{ik}(t)$ $(i,k = 1,2,\dots,n)$- нақты t аргументінің (жалпы алғанда комплекс мәнді) функциялары және олар t-ның (ақырлы немесе шексіз) өзгеру интервалында үзіліссіз функциялар, бойынша белгісіз $X(t) = \|x_{ij}(t)\|_{i,j=1}^{n,n}$ матрицасын табу үшін

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t)X(t), \qquad (0.3.1.1)$$

матрицалық дифференциалдық теңдеуін, басқаша айтқанда

$$\frac{dx_{ij}(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)x_{kj}(t) \quad (i,j = 1,2,\dots,n). \qquad (0.3.1.1')$$

бірінші ретті біртекті сызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйесін қарастыралық.

Сызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімі бар және жалғыз болатыны туралы теорема бойынша $X(t)$ матрицасы бірмәнді анықталуы үшін оның қандай да бір («бастапқы») $t = t_0$ нүктесіндегі мәні $X(t_0) = X_0$ берілуі жеткілікті. X_0 матрицасы ретінде кез келген ерекше емес $n \times n$ матрицасын (мәселен, $X_0 = E$ - бірлік матрица) алуға болады.

(0.3.1.1) - жүйенің *нормаландырылған*, яғни $X(t_0) = X_0 = E -$ бірлік матрица болатын, шешімін табу үшін тізбектей жуықтау әдісін қолданайық.

Ол үшін тізбектей жуықтауды былай анықталық:

$$X_0 = E, \quad \frac{dX_k(t)}{dt} = A(t)X_{k-1}(t), \quad k = 1,2,\dots$$

$X_k(t_0) = E$ $(k = 0,1,2,\dots)$ деп алсақ, онда

$$X_k(t) = E + \int_{t_0}^{t} A(s)ds + \int_{t_0}^{t} A(s)ds \int_{t_0}^{s} A(s_1)ds_1 + \int_{t_0}^{t} A(s) \int_{t_0}^{s} A(s_1)ds_1 \int_{t_0}^{s_1} A(s_2)ds_2 \ \dots$$

яғни $X_k(t)$ – оң жақтағы қатардың алғашқы $k+1$ мүшесінің қосындысы, т.с.с.

Ары қарай, $A(t) = \|a_{ik}(t)\|_{i,k=1}^{n,n}$ матрицасы t аргументінің өзгеру интервалында (мәселен, $t \in (a,b)$, мұндағы (a,b)- қандай да бір ақырлы

немесе шексіз интервал) үзіліссіз матрицалық функция болғандығынан, соңғы қатардың (a,b) аралығының кез келген ішкі *тұйық* аралығында абсолютті бірқалыпты жинақталатынын, бұл қатардың қосындысы (0.3.1.1) жүйені қанағаттандыратынын ((0.3.1.1)-жүйесінің шешімі болатынын) және бұл қосынды $t = t_0$ болғанда E бірлік матрицасына тең болатынын көрсету қиын емес.

Егер $A(t) -$ нақты t айнымалысының $n \times n$ өлшемді матрицалық функциясы өзінің анықталу облысында (айталық, (a,b) аралығында) жеткілікті тегіс (айталық, қажетті ретті туындылары бар) және ерекше емес $(det\, A(t) \neq 0)$ матрица болса, онда

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t)X(t), \qquad X(0) = E, \qquad (0.3.1.1)$$

матрицалық теңдеуінің (бар және жалғыз болатын) шешімі осы теңдеудің *матрицанты* немесе осы матрицалық теңдеу бойынша құрастырылған *мультипликативтік интеграл* деп аталады және ол

$$\Omega_0^t(A) = \prod_{s=0}^{t}(E + A(s)ds)$$

арқылы белгіленеді.

Егер $\overrightarrow{x_j}(t) = \left(x_{1j}(t), \dots, x_{nj}(t)\right)^*$ вектор – бағаны $X(t)$ матрицасының j-бағаны $(j = 1, 2, \dots, n)$ болса, онда, анықтама бойынша,

$$\frac{d\overrightarrow{x_j}(t)}{dt} = A(t)\overrightarrow{x_j}(t), \quad \overrightarrow{x_j}(0) = \vec{x}_0,$$

жүйесінің шешімі

$$\vec{x}(t) = \Omega_0^t(A)\vec{x}_0$$

векторы болады ($\overrightarrow{x_j}(0) = \vec{x}_0$ векторы тек $j -$ ші компоненті ғана 1 (бір) болатын бірлік вектор).

Мультипликативтік интегралдың қасиеттері. 1^0. Якоби тепе–теңдігі:

$$det\, \Omega_0^t(A) = exp\{\int_0^t Tr\,\big(A(s)\big)ds\},$$

мұндағы $det\, \Omega_0^t(A)$ - $\Omega_0^t(A)$ матрицасының анықтауышы, $Tr\,(A) - A$ матрицасының *ізі* (A матрицасының диагоналдық элементтерінің қосындысы): $Tr\, A(t) = a_{11}(t) + a_{22}(t) + \cdots + a_{nn}(t)$.

Шындығында да, $\Omega_0^t(A)$ матрицасының анықтауышын біртіндеп, анықтауыштың жолдары бойынша дифференциалдасақ және $(0.3.1.1')$ қатынастарын пайдалансақ, онда $[det\, \Omega_0^t(A)]_t' = Tr\, A(t) \cdot det\, \Omega_0^t(A)$ болатынын аламыз, ал бұдан Якоби тепе – теңдігі шығатыны айқын.

Егер $Tr\, A(t) = 0$ болса, онда, әрине $\Omega_0^t(A) = E$ (бірлік матрица).

2^0.

$$\frac{dY(t)}{dt} = -A^*(t)Y(t), \qquad Y(0) = E,$$

теңдеуі үшін

$$\Omega_0^t(-A^*) = \left(\left(\Omega_0^t(A)\right)^{-1}\right)^* = \left(\left(\Omega_0^t(A)\right)^*\right)^{-1}.$$

Жеке, $\vec{x}(t)$ баған − вектор жағдайы үшін, мәселен

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = -A^*(t)\vec{x}(t), \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0,$$

теңдеулер жүйесінің шешімі

$$\vec{x}(t) = \left(\left(\Omega_0^t(A)\right)^*\right)^{-1}\vec{x}_0\,.$$

3^0. Егер $\vec{x}(t),\ \vec{f}(t) - 1 \times n$ вектор – бағандар, $A(t) - n \times n$ – матрица:

$$\vec{x}(t) = \left(x_1(t), \dots, x_n(t)\right)^*, \vec{f}(t) = \left(f_1(t), \dots, f_n(t)\right)^*, A(t) = \|a_{ik}(t)\|_{i,k=1}^{n,n}$$

болса, онда

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = A(t)\vec{x}(t) + \vec{f}(t), \qquad \vec{x}(0) = \vec{x}_0\,,$$

теңдеулер жүйесінің шешімі

$$\vec{x}(t) = \Omega_0^t(A)\vec{x}_0 + \int_0^t K(t,\tau)\vec{f}(\tau)d\tau,$$

түрінде жазылады, мұндағы Коши матрицасы $K(t,\tau) = \Omega_0^t(A)[\Omega_0^\tau(A)]^{-1}$.

Біздің диссертациямыздың үшінші тарауының 3.1 бөлімі берілген сығылмайтын жылдамдықтар ағынындағы магнит өрісі теңдеуін *марковтық сызықтық ағын моделі* деген атпен енгізген арнайы бір марковтық ағын жағдайында зерттеуге арналған және зерттеу барысында пайда болған матрицалардың (стохастикалық) мультипликативтік интегралы жағдайы үшін бөлімнің негізгі нәтижесін - «Ферстенберг типтес» теореманы дәлелдеу, яғни [77-80, 87-89] нәтижелерін стохастикалық мультипликативтік интегралдар жағдайына жалпыландыруға арналған.

Енді осы III тараудың 3.1 бөлімінің негізгі нәтижелеріне қысқаша тоқталайық.

3.1.2. Марковтық сығылмайтын сызықтық ағындағы магнит өрісі

Магниттік диффузиясы υ_m $(\upsilon_m > 0)$ тұрақты болатын берілген *сығылмайтын* кездейсоқ $\vec{V}(t,x) = (V_1(t,x), V_2(t,x), \dots, V_\nu(t,x))$ жылдамдықтар өрісіндегі бастапқы үлестірімі $\overrightarrow{H_0}(x) = \langle H_{01}(x),\ H_{02}(x), \dots,\ H_{0\nu}(x)\rangle$ болатын $\vec{H}(t,x) = \left(H_1(x),\ H_2(x), \dots,\ H_\nu(x)\right)$ магнит өрісінің теңдеуі мына түрде беріледі

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{H} = \upsilon_m\Delta\vec{H} + rot\left[\vec{V}\times\vec{H}\right], \quad \vec{H}(0,x) = \overrightarrow{H_0}(x), \qquad (0.3.1.2)$$

мұндағы $t \geq 0,\ x \in R^\nu, \nu \geq 3.$

Егер жылдамдық өрісі $\vec{V}$ мен бастапқы өріс $\overrightarrow{H_0}$ *сығылмайтын өрістер* болса, яғни $div\,\vec{V}=0,\quad div\overrightarrow{H_0}=0$ болса, онда $div\,\vec{H}=0$ және (0.3.1.2) жүйесі мына жүйеге келтіріледі:

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{H}=\nu_m\Delta\vec{H}-\left(\vec{V},\nabla\right)\vec{H}+\left(\vec{H},\nabla\right)\vec{V},\qquad \vec{H}(0,x)=\overrightarrow{H_0}(x).\quad (0.3.1.5)$$

Марковтық сызықтық модель. Айталық, $b(t),\ t\geq 0$, берілген K, $dimK=\nu\geq 3$, компактты римандық көпбейнесіндегі броундық қозғалыс, ал K көпбейнесіндегі метрикалық форма ds^2 оның $x^1,\dots,x^\nu$ локалдық координаттарында

$$ds^2=\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\nu}g_{ij}dx^i dx^j,$$

түрінде жазылсын, мұндағы $d\sigma=\sqrt{\det g}\,dx-$ көлемнің римандық элементі. $b(s),\ s\geq 0$, процесінің инфинитезималдық операторы $\frac{1}{2}\Delta$ Бельтрами – Лаплас операторы болады, мұндағы

$$\Delta=\frac{1}{\sqrt{\det g}}\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\left(g_{ij}\sqrt{\det g}\right)\right).$$

Айталық, $\mathrm{C}(\cdot):K\to SL(\nu,R)$ болсын, мұндағы $SL(\nu,R)$ – *ізі нөлге тең* $(TrC=0)$ болатын квадраттық $\nu\times\nu$ матрицалардың сызықтық кеңістігі, $g_{ij}(x),c_{ij}(x)$ функциялары $C^\infty(K)$ класының функциялары.

Онда *жылдамдықтар өрісінің марковтық сызықтық моделі* деп

$$\vec{V}(t,x)=C(b_t)x,\qquad (0.3.1.6)$$

түрінде жазылатын жылдамдықтар өрісін, мұндағы $b_t=b(t)$ процесі, K көпбейнесі және $C(\cdot)$ матрицасы жоғарыда келтірілген шарттармен сипатталатын шамалар, айтамыз.

Ерекше атап айта кетелік, бұл (0.3.1.6) жылдамдықтар өрісі *сығылмайтын марковтық сызықты жылдамдықтар өрісі* болады (себебі $TrC=0$ болғандығынан $div\,\vec{V}=0$ болатыны шығады).

Марковтық сығылмайтын сызықтық модельдегі магнит өрісі. Ары қарай диссертацияда (0.3.1.5) магниттік индукция теңдеуінің (0.3.1.6) марковтық сығылмайтын сызықтық моделіндегі шешімінің сызықтық модельді анықтаушы сипаттамалардың бірі болып табылатын $C(b_t)\in SL(\nu,R)$ кездейсоқ матрицасы арқылы анықталатын стохастикалық мультипликативтік интеграл терминіндегі айқын шешімі жазылған.

Ол үшін біз алдымен магниттік индукция теңдеуінің дербес шешімі

$$\vec{H}\left(t,x,\vec{k}\right)=\vec{h}\left(t,\vec{k}\right)exp\left\{i\left(\vec{\varkappa}\left(t,\vec{k}\right),x\right)\right\},$$

мұндағы $t \geq 0,\ \vec{k} \in R^{\nu},\ \ i$ – жорамал бірлік және $\vec{\varkappa}(0,\vec{k}) = \vec{k}$, түрінде ізделген де, қажетті магнит өрісі дербес шешімді бүкіл облыс бойынша интегралдау арқылы алынған:

$$\vec{H}(t,x) = \int\limits_{R^{\nu}} \vec{H}(t,x,\vec{k})\,(\vec{k})d\vec{k} = \int\limits_{R^{\nu}} \vec{h}(t,\vec{k})e^{i(\vec{\varkappa}(t,\vec{k}),x)}\,d\vec{k}\,. \qquad (0.3.1.8)$$

Онда

$$\vec{H}(0,x) = \overrightarrow{H_0}(x) = \int\limits_{R^{\nu}} \vec{H}(0,x,\vec{k})\,(\vec{k})d\vec{k} = \int\limits_{R^{\nu}} \vec{h}(0,\vec{k})e^{i(\vec{\varkappa}(0,\vec{k}),x)}\,d\vec{k}\,. (0.3.1.9)$$

$g(t,\vec{k},x) = exp\{i(\vec{\varkappa}(t,\vec{k}),x)\}$ деп белгіленіп, дербес шешім $\vec{H}(t,x,\vec{k}) = \vec{h}(t,\vec{k})g(t,\vec{k},x)$ түрінде ізделінген. Сосын қажетті дербес туындыларды тауып, олар қанағаттандыратын теңдеулерді жиынтықтап, $\vec{\varkappa}(t,\vec{k}), \vec{h}(t,\vec{k})$ үшін келесі теңдеулерді аламыз:

$$\frac{d}{dt}\vec{\varkappa}(t,\vec{k}) = -C^{*}(b_t)\vec{\varkappa}(t,\vec{k}), \qquad \vec{\varkappa}(0,\vec{k}) = \vec{k}, \qquad (0.3.1.10)$$

$$\frac{d}{dt}\vec{h}(t,\vec{k}) + \upsilon_m\vec{\varkappa}^2\vec{h}(t,\vec{k}) = C(b_t)\vec{h}(t,\vec{k}),\ \ \vec{h}(0,\vec{k}) = \overrightarrow{h_0}(\vec{k}), \qquad (0.3.1.11)$$

мұндағы $\vec{\varkappa}^2 = (\vec{\varkappa}(t,k),\ \vec{\varkappa}(t,k))$ және $div\overrightarrow{H_0}(x) = 0$ шарты $(\overrightarrow{h_0},\ \vec{k}) = 0$ шартына эквивалентті.

Енді, егер

$$G_t = \prod_{s=0}^{t}(E + C(b_s)ds) \qquad (0.3.1.0)$$

стохастикалық мультипликативтік интегралын

$$\frac{d}{dt}G_t = C(b_t)G_t, \quad G_0 = E, \qquad (0.3.1.0')$$

теңдеулер жүйесінің шешімі ретінде анықтасақ, онда мультипликативтік интегралдың жоғарыда келтірілген $\mathbf{2^0}$ қасиетін (0.3.1.10)- теңдеуге, ал $\mathbf{3^0}$ қасиетін (0.3.1.11) теңдеуге қолданып, бұл теңдеулердің шешімдері сәйкес мына түрлерде жазылатыны байқалған:

$$\vec{\varkappa}(t,\vec{k}) = (G_t^{*})^{-1}\vec{k}\,, \qquad (0.3.1.12)$$

$$\vec{h}(t,\vec{k}) = G_t\overrightarrow{h_0}exp\left\{-\upsilon_m\int\limits_0^t \vec{\varkappa}^2(s,\vec{k})ds\right\}. \qquad (0.3.1.13)$$

Егер $\widehat{\overrightarrow{H_0}}(\vec{k})$- бастапқы магнит өрісі $\overrightarrow{H_0}(x)$ – тің Фурье түрлендіруі болса, онда

$$\overrightarrow{H_0}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\nu/2}} \int\limits_{R^\nu} e^{i(\vec{k},x)}\, \widehat{\overrightarrow{H_0}}(\vec{k}) d\vec{k}\,.$$

Ақыр соңында, (0.3.1.8) формулаға (0.3.1.12), (0.3.1.13) формулалармен табылған $\vec{\varkappa}(t,\vec{k})$ және $\vec{h}(t,\vec{k})$ – ның мәндерін қойып,

$$G_t\overrightarrow{h_0}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{\nu/2}}\, G_t\widehat{\overrightarrow{H_0}}(\vec{k})$$

болатынын ескеріп, (0.3.1.5) теңдеуінің (0.3.1.6) марковтық сызықтық моделіндегі шешімі үшін

$$\vec{H}(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{\nu}{2}}} \int\limits_{R^\nu} G_t\, \widehat{\overrightarrow{H_0}}(\vec{k}) exp\left\{ i\left((G_t^*)^{-1}\vec{k}, x\right) - \upsilon_m \int\limits_0^t \left((G_s^*)^{-1}\vec{k}\right)^2 ds \right\} d\vec{k}. \tag{0.3.1.14}$$

формуласы алынған. Сонымен бірге магнит өрісінің толық магниттік энергиясы $\mathcal{E}(t)$ үшін мына формуланың дұрыс болатыны көрсетілген:

$$\mathcal{E}(t) = \int\limits_{R^\nu} \vec{H}^2\,(t,x)dx = \int\limits_{R^\nu} \left(G_t\overrightarrow{H_0}(\vec{k})\right)^2 exp\left\{ -2\upsilon_m \int\limits_0^t \left((G_s^*)^{-1}\vec{k}^2\right) ds \right\} dk. \tag{0.3.1.15}$$

Сонымен, (0.3.1.14), (0.3.1.15) формулаларынан көрініп тұрғандай, G_t стохастикалық мультипликативтік интегралының Ляпунов көрсеткіштерінің $t \to \infty$ кездегі асимптотикаларын білу туралы сұрақ $\vec{H}(t,x)$ магнит өрісі мен $\mathcal{E}(t)$ магнит энергиясының $t \to \infty$ кездегі асимптотикаларын (асимптотикалық беталыстарын) зерттеу үшін аса маңызды.

Жоғарыда да айтып кеткеніміздей, сохастикалық мультипликативтік интегралдың 1^0 қасиетінен (Якоби тепе–теңдігінен) $trC(b_t) = 0$ болғандықтан, $detG_t = det\,\Omega_0^t(C) = 1$ болатынын көреміз. Бұдан G_t стохастикалық мультипликативтік интегралының (матрицанттың) барлық Ляпунов көрсеткіштерінің қосындысы нөлге тең болатыны шығады. Демек, Ляпуновтың жоғарғы көрсеткіші қатаң оң немесе нөлге тең болатыны туралы қорытындыға келеміз.

Диссертациямыздың үшінші тарауының 3.1 бөлімі шындығында да осы соңғы тұжырымның бірінші бөлігі орындалатынына, яғни G_t стохастикалық мультипликативтік интегралы үшін Ляпуновтың жоғарғы көрсеткіші қатаң оң болатынын дәлелдеуге, басқаша айтқанда G_t стохастикалық мультипликативтік интегралы үшін Ферстенберг типтес теореманы дәлелдеуге, арналған.

3.1.3. Стохастикалық мультипликативтік интерал үшін Ферстенберг типтес теорема.

Бұл пунктте (0.3.1.5) теңдеуімен анықталған магниттік индукция теңдеуін (0.3.1.6) марковтық сығылмайтын сызықты моделінде қарастыру барысында пайда болған

$$G_t = \prod_{s=0}^{t} (E + C(b_s)ds) \qquad (0.3.1.0)$$

стохастикалық мультипликативтік интегралы үшін Ляпунов көрсеткіші анықталып, зерттелген, мұндағы G_t

$$\frac{d}{dt} G_t = C(b_t)G_t, \quad G_0 = E, \qquad (0.3.1.0')$$

матрицалық теңдеуінің шешімі.

Қарастырып отырған жағдайда, кез келген $t \geq 0$ үшін $G_t \in SL(\nu, R)$ болатыны жылдамдықтар өрісінің сығылмайтындығының салдары болатыны жоғарыда атап өтілді.

Сосын кез келген $\theta_0 \in S^{\nu-1} = \{\theta \in R^{\nu}: \|\theta\| = 1\}$ бірлік векторы алынған да, оның ұзындығы (нормасы) $r_t = \|G_t\theta_0\|$ анықталған (диссертацияда $\|...\|$ арқылы сәйкес норма белгіленген: вектор үшін оның ұзындығы, матрица үшін оның матрицалық нормасы).

G_t үйірі үшін Ляпуновтың жоғарғы көрсеткіші мына формуламен анықталады:

$$\gamma = \lim_{t\to\infty} \frac{ln\|G_t\theta_0\|}{t} \quad (\text{Р} - a.\text{д.}).$$

Бұл шектің бар болатыны стационар эргодикалық матрицалар тізбегінің көбейтіндісі туралы Оселедец теоремасынан [92] шығады.

Ферстенберг теоремасының ең қиын бөлігі – ол шектің бар болуы емес, ол шектің қатаң оң болуы туралы мәселе.

3.1.4. Хермендер теоремасы және кейбір көмекші нәтижелер

Жоғарыда (0.3.1.0) формуласымен анықталған

$$G_t = \prod_{s=0}^{t} (E + C(b_s)ds)$$

мультипликативтік интегралы үшін (b_t, G_t) жұбы $K \times G$-да өзгешеленген (азғындалған) диффузиялық процесс болады. Диффузиялық процестердің осы секілді арнайы түрлерін зерттеудің Хермандер ұсынған әдісі белгілі. Хермандер *өзгешеленген* эллипстік-параболалық операторлар теориясына сүйене отырып, сәйкес техникалық аппарат жасап шығарған [95]. Бұл теорияның біздің мақсаттарымызға қолдануға лайықталған кейбір нәтижелерін келтірейік.

Айталық, K- тегіс компакт көпбейне, $X_1, X_2, \dots, X_m, Y - K$ көпбейнесіндегі C^∞ класына жататын векторлық өрістер болсын. Жалпы жағдайда келесі өзгешеленген эллипстік-параболалық дифференциалдық операторын қарастырайық:

$$A = \sum_{i=1}^{m} X_i^2 + Y\,, \quad m \le \dim K. \qquad (0.3.1.16)$$

Стохастикалық дифференциалдық теңдеулер теориясы негіздері аппаратын пайдаланып, A операторы инфинитезималдық операторы болатын үзіліссіз Феллер процесі x_t бар болатынын (табылатынын) көрсетуге болады.

Айталық, $P(t,x,\Gamma) -$ бұл (әрине біртекті болатын) процестің өту функциясы болсын: $P(t,x,\Gamma) = P(x(t) \in \Gamma / x(0) = x)$. Мынадай сұрақ туатыны орынды: $\{X_1, X_2, \dots, X_m, Y\}$ өрістеріне қандай шарттар қойғанда $x(t)$ процесінің қандай да бір тегістік қасиеттеріне ие болатын өту тығыздығы $p(t,x,y)$, яғни

$$P(t,x,\Gamma) = P_x\{x(t),\Gamma\} = \int_\Gamma p(t,x,y)dy\,, \quad \Gamma \in \beta(K)), \qquad (0.3.1.17)$$

мұндағы $\beta(K)$ - K көпбейнесіндегі борельдік $\sigma -$ алгебра, шартын қанағаттандыратын $p(t,x,y)$ өту тығыздығы бар болады?

Жауап мына, Хермандер теоремасы деп аталатын, теорема арқылы беріледі екен.

Теорема (Хермандер [95]). Айталық, K көпбейнесіндегі $X_1\,,\ X_2\,, \dots, X_m$ өрістері және келесідей мүмкін болатын барлық коммутаторлар

$$[X_{i_1}, Y], \left[X_{i_2}, [X_{i_1}, Y]\right], \left[[X_{i_1}, Y], Y\right], \dots, \left[X_{i_s}, \dots, [X_{i_1}, \underbrace{Y], Y], \dots, Y}_{l}]\right],\ s \ge 1,\ l \ge 1, \qquad (0.3.1.18)$$

арқылы пайда болған (туындатылған) Ли алгебрасы $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(X_1,\ X_2, \dots, X_m, Y)$ әрбір $x \in K$ нүктесінде максималды өлшемге ие болсын: $dim\mathfrak{C} = dimK$.

Онда $t > 0;\quad x, y \in K$, аргументтер жиынтығы бойынша тегіс (C^∞ класына жататын) өту тығыздығы $p(t,x,y)$, $t > 0$, бар болады.

(Y өрісінің коммутаторлар тізіміне енгізілмегеніне назар аударыңыз!)

Енді $p(t,x,y)$ өту тығыздығының оң болуы туралы сұрақтарды қарастырайық. Диссертацияда мынандай теорема дәлелденген.

Теорема 3.1.2. Айталық, K- компакт метрикалық кеңістік, $d(x,y)$- сәйкес метрика, $\beta(K) - K$-дағы ашық ішкі жиындар арқылы пайда болған борельдік σ-алгебра болсын. Сондай-ақ, $x(t)$- осы K-дағы (ықтималдық бойынша үзіліссіз) Марков процесі, $\mu(dx) -\ \beta(K)$ сигма – алгебрасындағы негізгі өлшем, ал $p(t,x,y)$- $x(t)$ процесінің $\mu(dx)$-қа байланысты $[0,\infty) \times K \times K$ – дағы өту тығыздығы, яғни

$$P_x\{x(t) \in \Gamma\} = P\{x(t) \in \Gamma / x(0) = x\} = \int_\Gamma p(t,x,y)\mu(dy)\,, \quad \Gamma \in \beta(K)),$$

болсын.

Қосымша $x(t)$ процесі келесі түрде *байланысқан* деп ұйғаралық: кез келген $x \in K$ нүктесі және $D \in \beta(K)$ ашық жиыны үшін

$$P_x\{x(t_0) \in D\} = \int_D p(t_0, x, z)\mu(dz) > 0$$

шартын ($x \in K$ нүктесінен шыққан процесс $t_0 = t_0(x, D)$ уақыт сәтінде D жиынына түсу ықтималдығы оң болатындық шартын) қанағаттандыратын детерминантталған (кездейсоқ емес) $t_0 = t_0(x, D)$ моменті табылады.

Сонымен бірге біз транспонирленген ядро үшін

$$\int_K p(t, y, x)\mu(dy) \to 1, \quad t \to 0,$$

шарты орындалады деп ұйғарамыз.

Онда кездейсоқ емес (детерминантталған) уақыт сәті $\hat{t}$ және қатаң оң $\varepsilon : \varepsilon > 0$, тұрақтысы табылады және кез келген $t > \hat{t}$, $x, y \in K$ үшін

$$p(t, x, z) \geq \varepsilon > 0$$

теңсіздігі орындалады.

Диссертацияда соңғы қатынас бірнеше маңызды салдарларды (күшейтілген үлкен сандар заңы, $x(t)$-ң эргодикалығы, ОШТ, $x(t)$-ң Харрис қайталануы және т.б.) қамтитындығы көрсетілген және теореманы дәлелдеу үшін қажет болатын бірнеше көмекші леммалар (лемма 3.1.1., лемма 3.1.2., лемма 3.1.3) дәлелденген.

3.1.4.1. Диффузиялардың Хёрмандер типті генераторлармен байланысы.

Айталық

$$K = K_1 \times K_2, \qquad A = A_1 + Y = \sum_{i=1}^{m_1} X_i^2 + \sum_{j=1}^{m_2} F_j(x, y)\frac{\partial}{\partial y_j},$$

болсын, мұндағы $m_1 = dim K_1$, $m_2 = dim K_2$, $x \in K_1$, $y \in K_2$, y_j $(j = 1,2, \dots, m_2)$- K_2-дегі координаттар. A операторымен байланысқан диффузия

$$x_t = (b_t, y_t),$$

түрінде жазылады, мұндағы b_t- өзгешеленбеген диффузия (K_1- дегі броундық қозғалыс), ал y_t

$$\frac{d}{dt}y_t = \sum_{j=1}^{m_2} F_j(b_t, y_t), \quad y_t|_{t=0} = y_0,$$

дифференциалдық теңдеуінің шешімі.

Диссертацияда мынандай лемманың дұрыстығы дәлелденген.

Лемма 3.1.4. Айталық, (x бойынша бөлікті - тұрақты)

$$\frac{d}{dt}\hat{y}_t = \sum_{j=1}^{m_2} F_j(x_i, \hat{y}_t),\ \ t \in [t_i, t_{i+1}],\ \ t_0 = 0, x_i \in K_1,$$

теңдеулер жүйесі, мұндағы $i = 0,1, \dots, n$, ал бастапқы $t_0 = 0$ уақыт сәтінде y_0 нүктесінен шыққан шешім $t = t_{n+1}$ уақыт сәтінде $\nu_1 \subset K_2$ маңайының кез келген нүктесіне түсетін, бар болсын.

Онда бастапқы (b_t, y_t) процесі байланыстылық қасиетіне ие болады.

Айталық, енді $K \times S^{\nu-1}$-да берілген (x_t, y_t) процесінің генераторы

$$A = \sum_{i=1}^{\nu} X_i^2 + Y\ ,$$

мұндағы оператор

$$Y = \big((C(x) - (\theta\ ^*C(x)\ \theta)E)\theta, \nabla_\theta\big),\ \ \theta \in S^{\nu-1}, \qquad (0.3.1.23)$$

ал $*$ - төңкеру (транспонирлеу) амалы, E - бірлік матрица, $S^{\nu-1} - \ R^{\nu}$-дегі бірлік сфера, $\nabla_\theta - \ \theta$ - бойынша градиент, операторы болсын.

Ары қарай $(0.3.1.0')$ теңдеуінің (0.3.1.0) шешімі ретінде анықталған

$$G_t = \prod_{s=0}^{t}(E + C(b_s)ds)$$

стохастикалық мультипликативтік интегралымен (матрицасымен) кез келген ұзындығы бірге тең (кездейсоқ емес) $\theta_0 \in S^{\nu-1}$ бірлік вектор – бағанға әсер етіп, $G_t\theta_0$ векторын аламыз.

Алынған вектордың евклидтік ұзындығын r_t: $r_t = \|G_t\theta_0\|$, арқылы белгілеп, $\theta_t = G_t\theta_0/r_t,\ \theta_t \in S^{\nu-1}$, векторы анықталған және бұл процестерге қатысты келесідей маңызды леммалар дәлелденген.

Лемма 3.1.5. θ_t және r_t процестері келесі теңдеулерді қанағаттандырады:

$$\frac{d}{dt}\theta_t = (C(b_t) - (\theta_t^* C(b_t)\theta_t)E)\theta_t,\ \ \theta_t|_{t=0} = \theta_0, \qquad (0.3.1.25)$$

$$\frac{d}{dt}r_t = (\theta_t^* C(b_t)\theta_t)r_t\ ,\ \ \ r_0 = 1. \qquad (0.3.1.26)$$

Лемма 3.1.6. (b_t, θ_t) диффузиялық марковтық процесінің инфинитезималдық операторы

$$A = \frac{1}{2}\Delta_x + \big((C(x) - (\theta^* C(x)\theta)E)\theta, \nabla_\theta\big)$$

операторы болады.

3.1.4. «Ферстенберг типтес» теорема

Ең алдымен біз $(0.3.1.0')$ жүйесі үшін Ляпунов көрсеткішінің ақиқат-дерлік (*а.д.*) бар болатыны дәлелденген.

Теорема 3.1.3. Келесі *а.д.* шек

$$\gamma = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln r_t = \int\limits_{K\times S^{\nu-1}} (\theta^* C(x)\theta)\pi(x,\theta)dxd\theta. \qquad (0.3.1.30)$$

бар болады.

Теорема 3.1.4. Кез келген нақты δ үшін

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln\left(M_{x,\theta} r_t^{\delta}\right) = \mu(\delta)$$

шегі бар болады, мұндағы $M_{x,\theta}$ белгісі (b_t, θ_t) процесінің бастапқы $t = 0$ уақыт сәтінде (x,θ) нүктесінен шығатын барлық траекториялары бойынша алынған шартты математикалық күтімді білдіреді.

$\mu(\delta)$ функциясы δ-ға байланысты тегіс функция болады және келесі қатынастарды қанағаттандырады:

$$\mu(0) = \mu(-\nu) = 0, \qquad \mu(\delta) = \mu\left(-(\nu+\delta)\right);$$

$$\mu(\delta) < 0, \quad \delta \in (-\nu, 0),$$

$$\mu(\delta) > 0, \quad \delta \notin (-\nu, 0);$$

$$\mu'(0) = -\mu'(-\nu) > 0.$$

Теореманы дәлелдеу үшін қажетті көмекші нәтижелер (лемма 3.1.7 және лемма 3.1.8) пайдаланылған.

Лемма 3.1.7. Кез келген $f, h \in C(K \times S^{\nu-1})$ үшін мына қатынас дұрыс:

$$\int\limits_{K\times S^{\nu-1}} f(x,\theta) P_{t,\theta} h(x,\theta) dxd\theta = \int\limits_{K\times S^{\nu-1}} h(x,\theta) P_{t,-(\nu+\delta)} f(x,\theta) dxd\theta \,. \quad (0.3.1.32)$$

Лемма 3.1.8. $\delta > 0$ үшін

$$M_{x,\theta}\, r_t^{\delta} > B(x,\delta) e^{\delta t} \qquad (0.3.1.35)$$

теңсіздігі орындалатындай $B = B(x,\delta) > 0$ табылады.

Теорема 3.1.4 - тен Ляпуновтың үлкен көрсеткіші γ қатаң оң болатыны шығады: $\gamma = \mu(1) > 0$. Сонымен мынандай теорема дұрыс.

Теорема 3.1.5. (Ферстенберг типтес теорема). Кез келген бекітіліп қойылған бастапқы фаза $\theta_0 \in S^{\nu-1}$ үшін (3.1.30) шегі ақиқат дерлік (*а.д.*) бар және қатаң оң болады:

$$\gamma = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln\|G_t\theta_0\| > 0 \ \ (a.д.).$$

3.1.5. Марковтық сызықтық модельдегі магнит өрісінің эволюциясы

Сонымен, (0.3.1.5) жүйесінің шешімі ретінде анықталған $\vec{H}(t,x)$ магнит өрісінің (0.3.1.6) марковтық сызықтық модельдегі эволюциясы (0.3.1.14), ал

магнит өрісінің толық энергиясы (0.3.1.15) интегралдық жазылымдары арқылы анықталады. Демек, магнит өрісінің өзінің және оның толық энергиясының $t \to \infty$ кездегі асимптотикалық беталыстарын зерттеу үшін G_t стохастикалық мультипликативтік интегралының өзінің де, және ол арқылы өрнектелетін (0.3.1.6) және (0.3.1.7) интегралдарының да $t \to \infty$ кездегі асимптотикалық беталыстарын зерттеу қажеттігі туындайды. G_t мультипликативтік интегралының $t \to \infty$ кездегі асимптотикалық беталысы туралы есеп жоғарыда шешілді (Ферстенберг типтес теореманы қараңыз). Басқаша айтқанда, Ферстенберг типтес теорема $t \to \infty$ кезде асимптотикалық түрде $r_t = \|G_t\theta_0\| \sim exp\{\gamma t\}, \gamma > 0$, яғни жеткілікті үлкен t үшін G_t – ның ұзындығы бірге тең векторға әсері вектордың ұзындығын экспоненциалды ұзартатынын көрсетеді. Ендеше енді $\vec{H}(t,x)$ магнит өрісі мен $\mathcal{E}(t)$ магниттік энергиясының $t \to \infty$ кездегі беталысын зерттеу туралы есепті шешу мәселесі қалды. Бұл есептің толық шешімі [100] жұмыста жарияланған (қосымша [96-99] жұмыстарды қараңыз).

[100] жұмыста $t \to \infty$ кездегі $G_t -$ ның беталысын зерттеу үшін алдымен біз ляпуновтық базистер деп атаған, жалпы алғанда кездейсоқ, базистер құрастырылған. Сосын, [91] жұмыстың нәтижелеріне сүйене отырып, G_t матрицасы үшін оның Ляпунов көрсеткіштерінің әртүрлі болатындығы (Ляпунов көрсеткіштерінің қарапайымдылық қасиеті) туралы теорема дәлелденген. Сосын осы қасиеттің және матрицалар теориясының белгілі нәтижелері (матрицаны ортогонал және жоғарғы үшбұрышты матрицаның көбейтіндісі түрінде жазу, т.с.с.) негізінде аса үлкен t $(t \to \infty)$-лар үшін, қажетті Ляпунов базисін пайдаланып, G_t матрицасы қандай да бір бекітіліп қойылған матрицаның дәрежесімен (жуықтап алғанда) бірдей болатындығы көрсетілген. Осы соңғы нәтиже магнит өрісінің $t \to \infty$ кезде аимптотикалық түрде экспоненциалды кемитіндігі туралы теореманы дәлелдеуге және алма кезектік құбылысын тағайындауға алып келген.

Үшінші бөлімнің 3.2 пункті үш өлшемді кеңістіктегі магниттік индукция теңдеуін зерттеуге арналған. Мұнда ең алдымен *кинематикалық динамоның дискретті моделі* ұғымы енгізіліп, оның ықтималдықтық сипаттамасы берілген және магнит өрісі үшін жоғарыдағыларға ұқсас сұрақтар бұл дискретті модельдегі жылдамдықтар өрісі дельта – корреляцияланған гаустық өріс болатын жағдай үшін зерттелген. Атап айтқанда, алдымен магниттік индукция теңдеуінің оң жағында тұрған оператор инфинитезималдық операторы болатын процесс сәйкес стохастикалық дифференциалдық теңдеудің шешімі болатын процесс (Лагранждық траектория) ретінде анықталған да, магниттік индукция теңдеуінің шешімі Кац– Фейнман формуласының дискретті аналогы арқылы жазылған, ал магнит өрісінің моменттері мен сәйкес Ляпунов көрсеткіштерін зерттеу осы Кац–Фейнман жазылымына сүйене отырып, жүзеге асырылған.

Үшінші бөлімнің нәтижелеріне қысқаша тоқталайық.

Астрофизикадағы кинематикалық динамо модельдері магнит өрісінің өткізгіш сұйықтың (плазма) ағынындағы генерациясын сипаттайды. Егер

$\vec{H}(t,x)$ –магнит өрісі, $\vec{v}(t,x)-$ кеңістік және уақыт бойынша стационар сығылмайтын жылдамдық өрісі, $\nu_m -$ магниттік диффузия (ортаның электр кедергісі) болса, онда Максвелл заңдары бойынша (толық ақпаратты [101], [74], [75] жұмыстардан қараңыз)

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \left(\vec{v}, \nabla \vec{H}\right) = \left(\vec{H}, \nabla\, \vec{v}\right) + \upsilon_m \Delta \vec{H}, \qquad (0.3.2.1)$$
$$\nabla \vec{H} = \nabla \vec{v} \equiv 0, \;\; \vec{H}(0,x) = \overrightarrow{H_0}(x)\; (t \geq 0, \qquad x \in R^3),$$

мұндағы Δ – (кеңістіктік координаттар бойынша) Лаплас операторы, ал ∇-(кеңістіктік координаттар бойынша) градиент.

Ары қарай $\vec{v}(t,x)$ жылдамдықтар өрісі уақыт бойынша қысқа корреляцияланған (турбуленттілік) және O^3 айналу группасына байланысты инвариантты (изотропия) деп ұйғарамыз. Параболалық

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{1}{2}(2\nu_m)\Delta \vec{H} - (\vec{v}, \nabla)\vec{H} \qquad (0.3.2.2)$$

теңдеуі (қиылған (0.3.2.1) – теңдеуі) $\vec{H}-$тың кез келген координатасына диффузия коэффициенті $D = 2\nu_m$ және жылдамдығы $\vec{v}(t,x)$ болатын Марков процесі ретінде әсер етеді (генерациялайды). (0.3.2.2) теңдеуінің оң жағындағы оператор инфинитезималдық операторы болатын $x(t)$ процесі Итоның келесі стохастикалық дифференциалдық теңдеуінің (СДТ) шешімі болады:

$$dx(t) = \sqrt{2\nu_m}\, d\overrightarrow{W}(t) - \vec{v}\big(t-s, x(s)\big)ds, \;\; 0 \leq s \leq t, \qquad (0.3.2.2')$$

мұндағы $\overrightarrow{W}(t),\; t \geq 0 -$ Винер процесі. $(0.3.2.2')$ стохастикалық дифференциалдық теңдеуіне (СДТ) сәйкес

$$x(t) = x + \sqrt{2\nu_m}\;\overrightarrow{W}(t) - \int_0^t \vec{v}\big(t-s, x(s)\big)ds, \qquad (0.3.2.3)$$

интегралдық теңдеуінің шешімін Лагранждық траекториялар деп атаймыз.

(0.3.2.1)-ді шешу үшін мультипликативтік стохастикалық интегралды қамтитын (Кац – Фейнман типтес)

$$G_{ij}\big(0,t,x,x(t)\big) = \prod_{s=0}^{t}\left(\delta_{ij} - \frac{\partial v_j(t-s,\;\; x(s)}{\partial x_i}ds\right) \qquad (0.3.2.4)$$

формуласын пайдалануға болады.

Енді $Tr\;\frac{\partial v_j}{\partial x_i}(\cdot) = 0$ болатынын байқалық (себебі $div\;\vec{v} = \nabla \vec{v} = (\nabla, \vec{v}) = 0$), яғни элементтері G_{ij} болатын G матрицасының анықтауышы 1-ге тең: $detG = 1$. Ақыр соңында,

$$\vec{H}(t,x) = M_x G\big(0,t,x,x(t)\big)\vec{H}_0\big(x(t)\big), \qquad (0.3.2.5)$$

мұндағы M_x белгісі бастапқы уақыт сәтінде x нүктесінен шығатын Винер процесінің барлық траекториялары бойынша шартты математикалық күтім алуды білдіреді.

Біздің барлық есептеулеріміз $\vec{v}(t,x)$ жылдамдық өрісі $x \in R^3$-ке қатысты (x бойынша бірқалыпты) жеткілікті тегіс функция болатыны туралы әдеттегі ұйғарымдарға негізделген.

Енді $\vec{v}(t,x)$ - уақыт бойынша δ -корреляцияланған гаустық өріс болсын деп ұйғаралық, яғни $\vec{v}(t,x)$ - бұл вектор мәнді "ақ шу" (төменде және бұдан былай қарай $\langle\ \rangle$ бұрыштық жақшалары жылдамдық өрісі бойынша орталандыруды білдіреді) болсын:

$$\langle v_i(t_1,x_1)\, v_j(t_2,x_2)\rangle = \delta(t_1-t_2)B_{ij}(x_1-x_2). \qquad (0.3.2.6)$$

Одан басқа, $\vec{v}$ өрісі изотропты болады: кез келген (кездейсоқ емес) ортогоналды O матрицасы үшін $law\ (O\vec{v}) = law(\vec{v})$, $div\ \vec{v} = (\nabla, \vec{v}) = 0$.

Бұл жағдайда (0.3.2.4) мультипликативтік интегралы анықтауыштары 1-ге тең тәуелсіз бірдей үлестірілген кездейсоқ матрицалардың көбейтіндісіне ұқсас болады, яғни

$$G_{ij}[t_1,t_2] = \int_{t_1}^{t_2} \left(\delta_{ij} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\big(t_2 - s, x(s)\big)\right) ds \in SL(3,R), \qquad (0.3.2.7)$$

және Ферстенберг теоремасы бойынша

$$\lim_{t\to\infty} \frac{ln\|G[0,t]\|}{t} \longrightarrow \tilde{\gamma} > 0\ (P-\text{а.д.}). \qquad (0.3.2.8)$$

Бұл жерде $\vec{H}(t,x)$ −ты табу үшін Винер өлшемі бойынша математикалық күтім алу, яғни "траекториялар бойынша қосынды алу" қажет, ал бұл айтарлықтай қысқартуларға алып келеді ([98] жұмыстағы ұқсас нәтижені қараңыз).

[74], [75] жұмыстар магнит өрісі $\vec{H}(t,x)$- тің тек екінші моменттерін (корреляциялық функцияларын) талдауды қамтиды.

Диссертацияның бұл үшінші бөлімінің 3.2 пунктінің негізгі мақсаты - дискретті динамо моделінде ρ параметрі (диффузиялық коэффициент) бойынша фазалық ауысу бар болатынын дәлелдеу. Фазалық ауысу $\vec{H}(t,x)$ магнит өрісінің (мағынасы бойынша өрістің локалдық энергиясын білдіретін) екінші моменті $m_2(t,x) = \langle\left(\vec{H}(t,x), \vec{H}(t,x)\right)\rangle$ үшін тағайындалатын (дәлелденетін) болады.

3.2.2. Дискретті модельдің сипаттамасы

Модельдің фазалық кеңістігі $(t,x),\ \ t \in Z_+ = \{0,1,\dots\},\ \ x \in Z^3$ нүктелерінен және (s,x) нүктесінен $(s-1,x')$, $|x'-x| \le 1$, нүктесіне бағытталған кесінділерден (қабырғалардан) тұрады.

Бұл графтың бойында уақыт бойынша өспелі, өту ықтималдықтары

$$P\{x(t+1)=x'/\,x(t)=x\}=\begin{cases}1-\rho, & \text{егер } x'=x,\\ \dfrac{\rho}{6}, & \text{егер } |x'-x|=1.\end{cases}$$

шартты ықтималдықтарымен берілетін $x(t)$ симметриялы кездейсоқ кезуін анықтауға болады. Бұл кездейсоқ кезудің Лагранждық траекториялары

$$\xi(s)=x+\xi(t-s), \qquad s\geq 0,$$

түрінде жазылады (кездейсоқ кезу x нүктесінен басталады және біз уақыттың бағытын өзгерттік, яғни

$$\xi(t)=x,\ \ \xi(t-1)=x+\xi(1),\ \ \text{т.с.с.}$$

$A\big((s,y),(s-1,y')\big)$ магниттік потенциалы графтың (s,y) нүктесінен шығып $(s-1,y'),\ |y-y'|\leq 1$, нүктесіне бағытталған қабырғаларында анықталған.

Біз $A\big((s,y),(s-1,y')\big)\in SL(3,R)$ 3×3 матрицалары әртүрлі қабырғалар үшін тәуелсіз және олар нақты қабырға үшін тәуелсіз кездейсоқ $O_1,\ \Lambda,\ O_2$ көбейткіштері (матрицалары) арқылы келесідей

$$A\big((s,y),(s-1,y')\big)=O_1\left((s,y),(s-1,y')\right)\Lambda\, O_2\big((s,y),(s-1,y')\big) \quad (0.3.2.13)$$

арнайы түрде жазылады деп ұйғарамыз.

Қосымша, тәуелсіз O_1,O_2 матрицалары O^3 ортогоналды группасында бірқалыпты үлестірілген, ал $\Lambda(\cdot,\cdot)$ диагоналдық матрицасы

$$\Lambda=\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{a}} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{a}}\end{bmatrix}\big((s,y),(s-1,y')\big),\quad |y-\,y'|\leq 1,\det\Lambda=1, \quad (0.3.2.14)$$

түріндегі матрица, мұндағы $a(t,x,\omega),t=0,1,\dots,\ x\in Z^3,$ шамалары (кездейсоқ функциялары) тәуелсіз бірдей үлестірілген, үлестірім тығыздығы шенелген және қандай да бір $\delta_0>0$ тұрақтысы үшін $\delta_0\leq a(t,x,\omega)\leq 1/\delta_0$ теңсіздігі орындалатын кездейсоқ шамалар.

(t,x) нүктесінен ең соңғы $(0,y)$ нүктесіне бағытталған кез келген $\xi(s),0\leq s\leq t,$ лагранждық траектория үшін оның толық магнит өрісі $\vec{H}(t,x)$ - ке қосатын (беретін) үлесін мына формула бойынша анықтаймыз:

$$\vec{H}_\xi(t,x)=A[(t,x_0),(t-1,x_1)]\cdot A[(t-1,x_1),(t-2,x_2)]\cdot\ldots\cdot$$
$$\cdot A[(1,x_{t-1}),(0,x_t=y)]\vec{H}_0(y), \quad (0.3.2.15)$$

мұндағы $\xi=(x_0,x_1,\dots,y)$ - Лагранждық траектория, $\vec{H}(0,y)=\vec{H}_0(y,\omega)-$ (жалпы алғанда, кездейсоқ) бастапқы магнит өрісі, мәселен $\vec{H}_0(y)=\vec{\eta}(y)$ және $\vec{\eta}(y)-$ мәндері R^3-те жататын тәуелсіз бірдей үлестірілген $\mathcal{N}(0,E)$ гаустық векторлар жиыны (олар изотропты!).

Егер біз $\xi(s),\ s \in [0,t]$, траекториясын біздің кездейсоқ кезудің кері уақыт бойынша іске асырылуы деп қарастырсақ, онда

$$P(\xi) = (1-\rho)^{n_0}\left(\frac{\rho}{6}\right)^{n_1}, \qquad (0.3.2.16)$$

мұндағы

$$n_0(\xi) = \#\left(s\colon \xi(s) = \xi(s-1)\right),$$
$$n_1(\xi) = \#\ (s\colon |\xi(s) - \xi(s-1)|\ = 1). \qquad (0.3.2.16')$$

Ақыр соңында, толық магнит өрісі $\vec{H}(t,x)$ үшін біз (анықтама бойынша) мынадай өрнек аламыз:

$$\vec{H}(t,x) = \sum_{y\in Z^3}\ \sum_{\xi:(t,x)\to(0,y)} P(\xi)\vec{H}_\xi(t,x)\ . \qquad (0.3.2.17)$$

Соңғы (0.3.2.17) – формуланы $\vec{H}(t,x)$ магнит өрісі үшін параболалық теңдеудің дискретті формасы

$$\vec{H}(t,x) = (1-\rho)A\big((t,x),(t-1,x)\big)\vec{H}(t-1,x) +$$
$$+\left(\frac{\rho}{6}\right)\sum_{x'\colon |x'-x|=1} A\big((t,x),(t-1,x')\big)\vec{H}(t-1,x') \qquad (0.3.2.18)$$

арқылы берілген Кац – Фейнман жазылымы ретінде түсінуге болады.

(0.3.2.15), (0.3.2.17), (0.3.2.18) формулалары арқылы моменттерді және келесідей $P-$ *а.д.* Ляпунов көрсеткіштерін зерттеуге болады:

$$\gamma_{2p} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2p}\frac{ln\left\langle\left(\vec{H},\vec{H}\right)^p\right\rangle}{t} \quad (P-a.\text{д.}),$$
$$\tilde{\gamma} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}\frac{ln\left\langle\left(\vec{H},\vec{H}\right)\right\rangle}{t} \quad (P-a.\text{д.}). \qquad (0.3.2.19)$$

Магнит өрісі $\vec{H}(t,x)$ −тің барлық тақ ретті моменттері нөлге тең болатынына назар аударамыз: $\langle\vec{H}(t,x)\rangle = 0$, $\langle\vec{H}(t,x)\cdot\left(\vec{H}(t,x),\vec{H}(t,x)\right)\rangle = 0$ (изотропиялық бойынша), т.б.

Ляпунов көрсеткіштерін есептеу бірнеше қарапайым леммаларға негізделген.

Лемма 3.2.1. $S^2 = \{x\in Z^3\colon |x| = 1\}$ бірлік сферасында бірқалыпты үлестірілген әрбір $\vec{v}(\omega)$ кездейсоқ векторы үшін

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \xi \\ \sqrt{1-\xi^2}cos\varphi \\ \sqrt{1-\xi^2}sin\varphi \end{bmatrix}, \qquad (0.3.2.20)$$

жазылымы дұрыс, мұндағы ξ мен φ сәйкесінше $[-1,1]$ және $[0,2\pi]$ аралықтарында бірқалыпты үлестірілген тәуелсіз кездейсоқ шамалар.

Лемма 3.2.2. Айталық ξ_1, ξ_2– $[0,t]$ уақыт интервалындағы әртүрлі (бірдей болмайтын) екі Лагранждық траекториялар болсын. Онда $\langle\left(\vec{H}_{\xi_1}(t,x_1), \vec{H}_{\xi_2}(t,x_2)\right)\rangle = 0$, яғни бұл траекториялардың $\vec{H}(t,x_1)$, $\vec{H}(t,x_2)$ өрістеріне қосатын сәйкес үлестері $\vec{H}_{\xi_1}(\cdot)$, $\vec{H}_{\xi_2}(\cdot)$ *корреляцияланбаған.*

Салдар. $\vec{H}(t,x_1)$, $\vec{H}(t,x_2)$, $x_1 \neq x_2$, кездейсоқ векторлары *корреляцияланбаған.*

Келесі теорема 3.2.1 Ферстенберг теоремасының [89] жеке жағдайы, бірақ мұнда изотропты жағдай үшін Ляпуновтың оң көрсеткіші үшін дәл (айқын) формула алынған.

Теорема 3.2.1. (Бұл іс жүзінде Ферстенберг теоремасы [89]).

$A_1, A_2 \ldots, A_n, \ldots$- тәуелсіз бірдей үлестірілген (үлестірімдері (0.3.2.13), (0.3.2.14) қатынастарымен берілген) $SL(3,R)$ группасының элементтері болсын.

Онда бекітіліп қойылған $\overrightarrow{e_0} \in R^3$, $|\overrightarrow{e_0}| = 1$, бірлік векторы үшін (төменде және бұдан былай қарай $|\quad|$ арқылы евклидтік норманы (вектордың ұзындығын) белгіледік)

$$\tilde{\gamma} = \lim_{n\to\infty} \frac{ln\,|A_n \cdot \ldots \cdot A_1\overrightarrow{e_0}|}{n} = \frac{1}{2} ln\,\langle\left(a^2\xi^2 + \frac{1-\xi^2}{a}\right)\rangle > 0, \quad (0.3.2.21)$$

және де мұнда орта мән $(|\xi|; a)$ – ның бірлескен үлестірімі бойынша, яғни бірлескен үлестірім тығыздығы

$$p(z,a) = 1 \cdot I_{[0,1]}(z)p(a), \quad a \in \left[\delta_0, \frac{1}{\delta_0}\right]$$

функциясы болатын үлестірім бойынша алынады.

Теорема 3.2.2. (Ферстенберг теоремасындағы моменттер). Кез келген жұп бүтін $2p$, $p \geq 1$, үшін

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2pn} ln\langle|A_n \cdot \ldots \cdot A_1\overrightarrow{e_0}|^{2p}\rangle = \gamma_{2p} = \frac{1}{2p} ln\,\langle\left(a^2\xi^2 + \frac{1-\xi^2}{a}\right)^p\rangle. \quad (0.3.2.23)$$

3.2.3. Екінші моментті талдау

Теорема 3.2.3. Айталық,

$$m_2(t,x) = \langle(\vec{H}(t,x), \vec{H}(t,x))\rangle = \langle\vec{H}^2(t,x)\rangle,$$

$$\gamma_2 = \lim_{t\to\infty} \frac{ln\langle\vec{H}^2(t,x)\rangle}{t} \quad (0.3.2.25)$$

болсын. Онда

$$\gamma_2 = -ln\left[\left((1-\rho)^2 + \frac{\rho^2}{6}\right)\langle\frac{a^2}{3} + \frac{2}{3a}\rangle\right]. \quad (0.3.2.26)$$

Теорема 3.2.4. (γ_2 көрсеткіші үшін фазалық өту). (3.2.26) формуламен анықталған γ_2 көрсеткішін қарастыралық.

Онда, егер

$$\langle \frac{a^2}{3} + \frac{2}{3a} \rangle > 7 \qquad (0.3.2.27)$$

болса, γ_2 көрсеткіші қатаң оң болады:

$$\gamma_2 > 0,$$

яғни кез келген ρ үшін *екінші момент* ($\vec{H}$ өрісінің энергиясы) *экспоненциалды өседі.*

Сонымен, қорытындылап айтсақ, диссертацияның үшінші бөлімінің 3.2 – пунктінде пунктте алынған негізгі нәтижелер келесілір:

1. Ляпуновтың ең үлкен көрсеткішінің қатаң оң $(\gamma_2 > 0)$ болатындығы дәлелденген (Ферстенберг типтес теорема);

2. γ_2 көрсеткішін табудың дәл (айқын) формуласы жазылған.

3. Магнит өрісінің тақ ретті моменттері нөлге тең болады, ал жұп ретті моменттерді, жеке жағдайда екінші ретті моментті, есептеудің дәл формулалары табылған.

4. γ_2 көрсеткіші үшін фазалық өту құбылысы (магнит өрісі энергиясының *экспоненциалды* өсу және кему аралықтары бар болатыны) орын алатыны туралы теоремалар дәлелденген және ол аралықтардың айқын түрлері көрсетілген.

1 ЫҚТИМАЛДЫҚТАР ТЕОРИЯСЫНЫҢ КЛАССИКАЛЫҚ ЕМЕС ОРТАЛЫҚ ШЕКТІК ТЕОРЕМАЛАРЫНЫҢ КЕЙБІР НҰСҚАЛАРЫ

Айталық

$$\xi_{n1},\ \xi_{n2}, \dots ,\ \xi_{nn}, \dots \qquad (1.1.1)$$

тәуелсіз кездейсоқ шамалар тізбегі,

$$F_{nj}(x) = P\big(\xi_{nj} < x\big),\ \ j = 1,2, \dots,$$

$$S_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \cdots,$$

болсын. Айта кетелік, S_n қосындысындағы қосылғыштардың саны ақырлы болуы да, ақырсыз (шексіз) болуы да мүмкін. Соңғы жағдайда S_n қатарын тәуелсіз кездейсоқ шамалардың әлсіз жинақталу мағынасында жинақталатын қатары ретінде түсінеміз.

Ескерту 1.1.1. Ықтималдықтар теориясынан соңғы қатар (яғни S_n) үшін үлестірім бойынша жинақталу (әлсіз жинақталу) бірге тең ықтималдықпен (ақиқат дерлік) жинақталуға эквивалент болатыны белгілі.

Айталық

$$F_n(x) = P(S_n < x) = F_{n1} * F_{n2} * \dots * \dots,$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du,$$

(стандарт нормал кездейсоқ шаманың үлестірім функциясы) болсын, мұндағы $*$ белгісі үлестірімдердің композициясын (үйірткісін) алуды білдіреді.

$F(x)$ пен $G(x)$ үлестірім функцияларының арасының қашықтығын

$$L(F,G) = inf\ \{\varepsilon : F(x-\varepsilon) - \varepsilon \le G(x) \le F(x+\varepsilon) + \varepsilon; x \in R\}, \qquad (PL)$$

шамасы арқылы анықталық. Онда $L(F,G)$ қашықтығы метрикалық кеңістіктің аксиомаларын қанағаттандыратынын дәлелдеу қиын емес ([7], 38 – бет):

1) $L(F,G) = 0$ сонда және сонда ғана, егер $F = G$ болса,

2) $L(F,G) = L(G,F)$,

3) $L(F,H) \le L(F,G) + L(G,H)$.

(PL) қатынасымен анықталатын метриканы П.Леви енгізген, сондықтан ол ғылыми әдебиеттерде Леви метрикасы ($L-$метрика) деп аталады. Айтылғандар $L(.,.)$ қашықтығы үлестірімдердің әлсіз жинақталу топологиясын метрикалайтынын көрсетеді.

Сонымен қатар мына белгілі нәтижені келтіре кетелік.

Теорема ([7, 38 - бет, теорема 1]. (1.1.1) тізбегі орталық шектік теоремаға (ОШТ) бағынуы үшін

$$\lim_{n\to\infty} L(F_n, \Phi) = 0 \qquad (1.1.2)$$

шартының орындалуы *қажетті және жеткілікті.*

Жоғарыда атап кеткеніміздей, тривиалды емес бірақ жеткілікті жалпыландыруларға ие ОШТ дұрыс болатынын қамтамасыз ететін (1.1.2) шарт орындалуы үшін қосылғыштарға қандай шектеулер қою керек деген сұрақ туындайтыны орынды. Осы жолда бірқалыпты шексіз аздық шарты деген атпен белгілі келесі шарт пайда болды.

Бірқалыпты шексіз аздық шарты. Кез келген $\varepsilon > 0$ үшін

$$\sup_j P\left(\left|\xi_{nj}\right| \geq \varepsilon\right) \to 0, \quad n \to \infty. \qquad (1.1.3)$$

(1.1.3) шектеуінің қажеттілігі, ең бірінші кезекте, S_n қосындысын құрайтын қосылғыштардың қосындыға беретін «үлестерін» өзара бірдей жасау мақсатынан туындап отырғаны түсінікті. Жалпы (1.1.3) шарты орындалған кездегі тәуелсіз кездейсоқ шамаларды қосу теориясын құру, негізінен П.Леви, В.Феллер, А.Я.Хинчин, А.Н.Колмогоров, Б.В.Гнеденко секілді математиктермен байланысты. Мәселен, бұл ғалымдардың еңбектерінде F_n үлестірім функцияларының әлсіз жинақталу мағынасындағы шектік үлестірім заңдарының барлық шекарасыз бөлінбелі үлестірім заңдары класымен бірдей болатындығы дәлелденген. [10] монографияда атап өтілгендей, алғашқылардың бірі болып, ОШТ-ның қосылғыштардың бірқалыпты шексіз аздық шарты талап етілмеген жағдайларда дұрыс болуының басқа шарттарын табу есептерімен П.Леви айналысқан.

(1.1.3) *бірқалыпты шексіз аздық* шартын пайдаланып, дәлелденетін шектік теоремаларды- *классикалық*, ал пайдаланбай дәлелденетін шектік теоремаларды- *классикалық емес* деп атауды алғаш рет [11] жұмыста В.М.Золотарев ұсынған. ОШТ-ның жалпыланған классикалық нұсқаларын Линдеберг– Феллер түріндегі орталық шектік теоремалар деп атайды.

1.1 Кейбір классикалық емес шектік теоремаларды Леви метрикасы терминінде және сипаттамалық функциялар әдісімен дәлелдеу

Теорема 1.1.1. (1.1.1) кездейсоқ шамалар тізбегінің математикалық күтімдері нөлге $\left(M\xi_{nj} = 0\right)$ тең, дисперсиялары $M\xi_{nj}^2 = \sigma_{nj}^2$ ақырлы және

$$\sum_j \sigma_{nj}^2 = 1 \qquad (1.1.4)$$

болсын.

Онда $L(F_n, \Phi) \to 0$ жинақталуы, яғни ОШТ орындалады *сонда және сонда ғана*, егер келесі екі шарт орындалса:

а)

$$\alpha_n = \sup_j L\left(F_{nj}, \Phi_{nj}\right) \to 0 \ (n \to \infty), \qquad (1.1.5)$$

мұндағы $\Phi_{nj}(x) = \Phi\big(x/\sigma_{nj}\big)$;

б) кез келген бекітіліп қойылған (әрбір) $\varepsilon > 0$ үшін

$$L_n(\varepsilon) = \sum_{j\in A_n} \int\limits_{|x|\geq\varepsilon} x^2 d\big(F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)\big) \to 0 \ (n \to \infty)\,, \qquad (1.1.6)$$

мұндағы A_n жиыны $\sigma_{nj}^2 \leq \sqrt{\alpha_n}$ теңсіздігін қанағаттандыратын j индексінің мәндерінен ғана тұрады, яғни

$$A_n = \big\{j\colon\ \sigma_{nj}^2 \leq \sqrt{\alpha_n}\big\}. \qquad (1.1.7)$$

Ескерту 1.1.2. [15] әдебиетте **а)** мен **б)** шарттарын төмендегідей бір шартқа біріктіруге болатындығы дәлелденген:

Кез келген бекітіліп қойылған $\varepsilon > 0$ үшін

$$R_n(\varepsilon) = \sum_j \int\limits_{|x|\geq\varepsilon} |x|\big|F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)\big|dx \to 0,\ \ n \to \infty. \qquad (1.1.8)$$

Ескерту 1.1.3. Егер σ_{nj}^2 дисперсиялары бар болатын болса, онда (1.1.3) (бірқалыпты шексіз аздық) шарты

$$\sup_j L\big(F_{nj}, 0\big) \to 0 \quad (n \to \infty) \qquad (1.1.3')$$

шартына ауысады.

Келесі дәлелденетін лемма 1 жоғарыда келтірілген (1.1.3), (1.1.5), $(1.1.3')$ шарттарының арасындағы өзара байланысты көрсетеді.

Лемма 1.1.1. Егер $(1.1.3')$ шарты орындалса, онда (1.1.5) шартынан (1.1.3) (бірқалыпты шексіз аздық) шартының орындалатыны шығады.

Дәлелдеу. Ескерту 3-ке сәйкес, (1.1.3) шарты $(1.1.3')$ шартына эквивалент. Ары қарай, метрикалық қашықтықтың қасиеті бойынша,

$$L\big(F_{nj}, 0\big) \leq L\big(F_{nj}, \Phi_{nj}\big) + L\big(\,\Phi_{nj}, 0\big). \qquad (1.1.9)$$

Бұдан

$$\sup_j L\big(F_{nj}, 0\big) \leq \alpha_n + \sup_j L\big(\Phi_{nj}, 0\big). \qquad (1.1.10)$$

Сонымен бірге, кез келген j үшін

$$L\big(\Phi_{nj}, 0\big) \leq \int\limits_{|x|\geq\varepsilon} d\,\Phi_{nj} = \int\limits_{|x|\geq\frac{\varepsilon}{\sigma_{nj}}} d\,\Phi \leq \int\limits_{|x|\geq\frac{\varepsilon}{\sup_j \sigma_{nj}}} d\,\Phi \to 0 \quad (n \to \infty) \quad (1.1.11)$$

екенін көруге болады.

(1.1.11)-дегі шектік қатынас, (1.1.4)- қатар жинақталатыны себепті, $\sigma_{n,j} \to 0$ $(n \to \infty)$ болғанынан шығады. ■

Бұл пункттегі біздің негізгі мақсатымыз - *классикалық емес* ОШТ-ның келесі бір нұсқасын сипаттамалық функциялар терминінде дәлелдеу.

Алдымен келесідей белгілеулер енгізейік:

$$f_{nj}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_{nj}(x),$$

$$\varphi_{nj}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\Phi_{nj}(x) = e^{-\frac{\sigma_{nj}^2 t^2}{2}}, \qquad j = 1,2, \ldots,$$

$$f_n(t) = Me^{itS_n} = \prod_j f_{nj}(t), \qquad \varphi_n(t) = \prod_j \varphi_{nj}(t).$$

Бірден айта кетелік, (1.1.4) қатынастан $\varphi_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ болатынын көреміз.

Теорема 1.1.2. Айталық, теорема 1.1.1-дің шарттары орындалсын.

Онда $L(F_n, \Phi) \to 0$, яғни ОШТ тұжырымындағы шектік жинақталу орындалады *сонда және сонда ғана*, егер $n \to \infty$ кезде келесі екі шарт орындалса:

1) кез келген $T > 0$ үшін

$$\sup_j \sup_{|t| \le T} \left| f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t) \right| \to 0. \tag{1.1.12}$$

2) әрбір оң T үшін

$$\sup_{|t| \le T} \sum_{j \in A_n} \left| f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t) \right| \to 0, \tag{1.1.13}$$

мұнда A_n жиыны (1.1.7) қатынасымен анықталған жиын.

Дәлелдеу. Теорема 1.1.2- ні дәлелдеу барысында төменде дәлелденетін көмекші 1.1.2 -1.1.4 леммаларды пайдаланатын боламыз.

Алдымен, кез келген $F(x)$ үлестірім функциясы үшін

$$F^*(x) = 1 - F(x) + F(-x)$$

белгілеуін енгізелік.

Айталық, $g(x)$ қандай да бір теріс емес және $[0,\infty)$ интервалында кемімейтін функция, ал $F(x)$ және $G(x)$ келесі теңдікті қанағаттандыратын екі үлестірім функциясы болсын

$$\int_0^{\infty} g(x) F^*(x) dx = \int_0^{\infty} g(x) G^*(x) dx. \tag{1.1.14}$$

$F(x)$ және $G(x)$ үлестірім функциясы үшін ν - метрикасын келесі қатынас арқылы анықтайық:

$$\nu(F, G) = \int_{-\infty}^{\infty} g(|x|) |(F(x) - G(x))| dx.$$

ν ықтималдықтық метрика болатындығын тікелей тексеру қиын емес.

Келесі лемма [15] жұмыста дәлелденген.

Лемма 1.1.2. ([5]). Егер (1.1.14) шарты орындалса, онда кез келген $B > 0$ үшін

$$\nu(F,G) \le 4\left\{\int_{-\infty}^{\infty} g(x)G^*(x)dx + g(B)(B+1)L(F,G)\right\}. \qquad (1.1.15)$$

Бұдан ары бөліктеп интегралдау арқылы математикалық күтімі нөлге тең, ал дисперсиясы σ^2 ақырлы болатын кез келген $F(x)$ үлестірім функциясы үшін келесі теңдік

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x) = 2\int_{0}^{\infty} xF^*(x)dx, \qquad (1.1.16)$$

орындалатынын көрсетуге болады, мұндағы $F^*(x)$ - (1.1.14) қатынасымен анықталған функция. Егер $g(x) = x$ болсын деп алсақ, онда (1.1.14) шарты (1.1.16) теңдігіне байланысты келесі шартқа көшеді:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dG(x) = \sigma^2. \qquad (1.1.17)$$

Айталық $\bar{G}(x) = G(\sigma x)$ болсын. Онда (1.1.15) теңсіздігін мына түрде жазуға болады

$$\nu(F,G) \le 4\left\{\sigma^2 \int_{\frac{B}{\sigma}}^{\infty} x\left(\bar{G}(x)\right)^* dx + B(B+1)L(F,G)\right\}. \qquad (1.1.15')$$

(1.1.16)- шы теңдікті есептеуде қолданылған тұжырымдар бойынша кез келген $\varepsilon > 0$ үшін

$$\int_{|x|\ge\varepsilon} x^2 dF(x) \ge \int_{\varepsilon}^{\infty} xF^*(x)dx. \qquad (1.1.18)$$

теңсіздігі орындалады.

(1.1.15′) теңсіздігінде $B = A\sigma$ деп алып және (1.1.17), (1.1.18) формулаларды ескере отырып, сонымен қатар $A \ge 1$ үшін $\frac{\sigma}{A} \le 1$ екенін қолданып, келесі салдарды аламыз

Салдар. Кез келген $A \ge 1$ үшін

$$\nu(F,G) \le 4\left\{\sigma^2 \int_{|x|>A} x^2 d\bar{G}(x) + A^2(\sigma^2+\sigma)L(F,G)\right\}. \qquad (1.1.19)$$

Лемма 1.1.3. Айталық $n \to \infty$ кезде (1.1.5) қатынасы орындалсын. Онда кез келген $T > 0$ үшін $n \to \infty$ кезде

$$\sup_j \sup_{|t|\le T} \left| f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t) \right| \to 0. \qquad (1.1.20)$$

Ескерту 1.1.4. (1.1.20) шектік қатынасы [10] жұмыста қарсы ұйғарым бойынша дәлелденген. Қазір біз осы қатынастың тікелей (тура) дәлелдеуін келтіреміз. Сонымен қатар осы лемманы дәлелдеу барысында алынған баға төменде, теореманы дәлелдеу барысында пайдаланылатын болады.

Лемма 1.1.3-тің дәлелдеуі. $F_{nj}(x)$ пен $\Phi_{nj}(x)$ үлестірімдері математикалық күтімдері нөлге тең болатын үлестірімдер екенін ескере отырып, олардың сипаттамалық функцияларының айырымдары үшін былай жаза аламыз:

$$f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx\right) d\left(F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)\right).$$

Бөліктеп интегралдау арқылы келесі теңдікті аламыз:

$$\left| f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t) \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} (it)\left(e^{itx} - 1\right)\left(F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)\right) dx \right|.$$

Осыдан, $\left|e^{i\alpha} - 1\right| \le |\alpha|$ болғандықтан, кез келген нақты $\alpha \in R$ үшін:

$$\left| f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t) \right| \le |t|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |x| \left| F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x) \right| dx = t^2 \nu\left(F_{nj}, \Phi_{nj}\right). \qquad (1.1.21)$$

Енді (1.1.19) теңсіздікте келтірілген $\upsilon(F, G)$ метрикасының бағасын пайдаланамыз және дисперсиясы σ_{nj}^2 болатын Φ_{nj}, яғни $\Phi_{nj}\left(\sigma_{nj} x\right) = \Phi(x)$ болатын Φ_{nj} үлестірімін қарастыралық. Онда кез келген $A \ge 1$ үшін

$$\nu\left(F_{nj}, \Phi_{nj}\right) \le 4 \left\{ \sigma_{nj}^2 \int_{|x|>A} x^2 d\Phi(x) + A^2\left(\sigma_{nj}^2 + \sigma_{nj}\right) L\left(F_{nj}, \Phi_{nj}\right) \right\}. \qquad (1.1.22)$$

(1.1.4) - ті ескере отырып, (1.1.22) - ден

$$\sup_j \nu\left(F_{nj}, \Phi_{nj}\right) \le 4 \left[\int_{|x|>A} x^2 d\Phi(x) + 2A^2 \alpha_n \right] \qquad (1.1.23)$$

теңсіздігін аламыз. Енді лемманың тұжырымы (1.1.5), (1.1.21), (1.1.23) қатынастарынан шығады және A-ны таңдау мүмкіндігі жеткілікті үлкен.

Келесі лемма [6]– жұмыста дәлелденген.

Лемма 1.1.4 ([6]). Егер $|a_k| \le 1$, $|b_k| \le 1$, $k = 1,2, \ldots, n,$ болса, онда

$$\left| \prod_{k=1}^{n} a_k - \prod_{k=1}^{n} b_k \right| \le \sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k|.$$

Теорема 1.1.2-нің дәлелдеуі.

Жеткіліктілігі. Алдымен теорема 1.1.1-дегі а) шартының лемма 1.1.3 - тің (1.1.12)-ші шарты және теорема 1.1.2-ден шығатынын байқалық. Ары қарай лемма 1.1.4-ті пайдаланып, былай жаза аламыз:

$$\left|f_n(t)-e^{-\frac{t^2}{2}}\right|=\left|\prod_j f_{nj}(t)-\prod_j \varphi_{nj}(t)\right|\le\sum_j\left|f_{nj}(t)-\varphi_{nj}(t)\right|=$$

$$=\sum_{j\in A_n}\left|f_{nj}(t)-\varphi_{nj}(t)\right|+\sum_{j\in\bar{A}_n}\left|f_{nj}(t)-\varphi_{nj}(t)\right|. \qquad (1.1.24)$$

Енді теорема 1.1.2 - нің 2) шартынан (1.1.24) қатынастың оң жағындағы бірінші қосынды нөлге ұмтылатынын көреміз. Демек, теорема 1.1.2-нің тұжырымын толық дәлелдеу үшін (1.1.24) қатынастың оң жағындағы екінші қосынды n шектеусіз өскен $(n\to\infty)$ кезде нөлге ұмтылатынын көрсету жеткілікті.

Әрбір $j\in\bar{A}_n$ үшін $\sigma_{nj}^2\ge\sqrt{\alpha_n}$ болғандықтан ((1.1.7) - ні қараңыз)

$$\sum_{j\in A_n}\sigma_{nj}^2\ge\sqrt{\alpha_n}\sum_{j\in A_n}1.$$

(1.1.4) - ке сәйкес, қосынды $\sum_{j\in A_n}\sigma_{nj}^2\le 1$, демек соңғы қосындыдағы қосылғыштар саны, яғни $\bar{A}_n$ жиынының элементтерінің саны келесі теңсіздікті қанағаттандырады:

$$|\bar{A}_n|=\sum_{j\in\bar{A}_n}1\le\frac{1}{\sqrt{\alpha_n}}. \qquad (1.1.25)$$

(1.1.21), (1.1.22), (1.1.25) теңсіздіктерінен $T>0$ және $A\ge 1$ үшін келесі теңсіздіктер тізбегін жаза аламыз:

$$\sup_{|t|\le T}\sum_{j\in\bar{A}_n}\left|f_{nj}(t)-\varphi_{nj}(t)\right|\le T^2\sum_{j\in\bar{A}_n}\nu\left(F_{nj},\Phi_{nj}\right)\le$$

$$\le 4T^2\left[\int_{|x|>A}x^2d\Phi(x)+2A^2\sqrt{\alpha_n}\right].$$

Бұдан, егер A -ны $A^2\sqrt{\alpha_n}\to 0\ \ (n\to\infty)$ орындалатындай жеткілікті үлкен етіп алсақ (ондай мүмкіндік бізде әруақта бар екені сөзсіз), онда соңғы теңсіздіктен

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{|t|\le T}\sum_{j\in\bar{A}_n}\left|f_{nj}(t)-\varphi_{nj}(t)\right|=0 \qquad (1.1.26)$$

қатынасын аламыз.

Сонымен барлық t үшін $[-T,T]$ кесіндісінде мына шектік қатынас дұрыс болады:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}, \qquad (1.1.27)$$

яғни 1) және 2) шарттары (2) шартының (ОШТ) орындалуының жеткілікті шарттары болып табылады.

Қажеттілік. 1) шартының қажеттілігі 1.1.1 теоремасынан және лемма 1.1.3 - тен шығады. Ал 2) шартының қажеттілігін дәлелдеу үшін F_{nj} және Φ_{nj} үлестірімдері бірдей, математикалық күтімдері нөлге және дисперсиялары бірдей ($\sigma_{nj}^2 -$ қа тең) үлестірімдер болатындығынан шығатын келесі қатынасты пайдаланалық:

$$f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx - \frac{(itx)^2}{2}\right) d\left(F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)\right).$$

Осы қатынасты бөліктеп интегралдап, сосын айырымның модулін бағалап, келесі теңсіздіктер тізбесін аламыз: кез келген $\varepsilon > 0$ үшін

$$\left|f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t)\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} it\left(e^{itx} - 1 - itx\right)\left(F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)\right)dx\right| \leq$$

$$\leq |t| \int_{|x|\leq\varepsilon} \left|e^{itx} - 1 - itx\right|\left|F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)\right|dx +$$

$$+ \left|it \int_{|x|>\varepsilon}^{0} \left(e^{itx} - 1 - itx\right)\left(F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)\right)dx\right|. \qquad (1.1.28)$$

I_1 мен I_2 арқылы (1.1.28)-дің оң жағындағы сәйкес бірінші және екінші қосылғыштарды белгілелік және оларды бағалалық.

$$\left|e^{itx} - 1 - itx\right| \leq \frac{t^2x^2}{2}$$

теңсіздігін пайдалана отырып былай жаза аламыз:

$$I_1 \leq \frac{|t|^3}{2} \int_{|x|\leq\varepsilon} x^2\left|F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)\right|dx \leq$$

$$\leq \frac{|t|^3}{2} \cdot \varepsilon \int_{|x|\leq\varepsilon} |x|\left|F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)\right|dx. \qquad (1.1.29)$$

Ары қарай

$$\int_{-\varepsilon}^{0}(-x)\left|F_{nj}(x)-\Phi_{nj}(x)\right|dx=\int_{0}^{\varepsilon}u\left|F_{nj}(-u)-\Phi_{nj}(-u)\right|du\leq$$

$$\leq\int_{0}^{\varepsilon}uF_{nj}(-u)du+\int_{0}^{\varepsilon}u\Phi_{nj}(-u)du. \qquad (1.1.30)$$

Бұдан

$$\int_{0}^{\varepsilon}x\left|F_{nj}(x)-\Phi_{nj}(x)\right|dx\ \leq$$

$$\leq\int_{0}^{\varepsilon}x\left(1-F_{nj}(x)\right)dx+\int_{0}^{\varepsilon}x\left(1-\Phi_{nj}(x)\right)dx\ . \qquad (1.1.31)$$

(1.1.29)- (1.1.31)-лерден, $F_{nj}^{*}(x)$ пен $\Phi_{nj}^{*}(x)$ функцияларының анықтамаларын ескере отырып және (1.1.16) теңдігінен мынаны аламыз:

$$I_1\leq\frac{|t|^3}{4}\cdot\varepsilon\left[2\int_{0}^{\varepsilon}xF_{nj}^{*}(x)dx+2\int_{0}^{\varepsilon}x\Phi_{nj}^{*}(x)dx\right]\leq$$

$$\leq\frac{|t|^3}{4}\cdot\varepsilon\left[2\int_{0}^{\infty}xF_{nj}^{*}(x)dx+2\int_{0}^{\infty}x\Phi_{nj}^{*}(x)dx\right]=$$

$$=\frac{|t|^3}{4}\cdot\varepsilon\left[2\int_{0}^{\infty}x^2dF_{nj}(x)+2\int_{0}^{\infty}x^2d\Phi_{nj}(x)\right]=\frac{|t|^3}{4}\cdot\varepsilon\left(\sigma_{nj}^2+\sigma_{nj}^2\right)=$$

$$=\frac{|t|^3}{2}\cdot\varepsilon\sigma_{nj}^2\ . \qquad (1.1.32)$$

I_2 -ні бағалау үшін бізге көмекші лемма 1.1.5 қажет болады. Алдын ала кез келген $F(x)$ үлестірім функциясы үшін

$$\tilde{F}(x)=\begin{cases}1-F(x), & x>0,\\ F(x), & x\leq 0,\end{cases}$$

функциясын анықтап, кез келген $F(x)$ және $G(x)$ үлестірім функциялары үшін

$$|F(x)-G(x)|\leq\left|\tilde{F}(x)-\tilde{G}(x)\right|\leq\tilde{F}(x)+\tilde{G}(x) \qquad (1.1.33)$$

теңсіздігі орындалатынын атай кетелік.

Лемма 1.1.5. Егер қандай да бір $k\geq 1$ үшін

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^k dF(x) < \infty$$

болса, онда кез келген $\varepsilon > 0$ үшін

$$\int_{|x|>\varepsilon} |x|^k dF(x) \le k \int_{|x|>\varepsilon} |x|^{k-1} \tilde{F}(x) dx. \qquad (1.1.34)$$

Дәлелдеу. Лемманың дәлелдеуі келесі қатынастан оп-оңай шығады:

$$\int_{|x|>\varepsilon} |x|^k dF(x) = \int_{\varepsilon}^{\infty} x^k d\left(-\tilde{F}(x)\right) + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} (-x)^k d\tilde{F}(x).$$

Енді I_2 - ні бағалайық. Ол үшін алдымен I_2- ні мына түрде жазайық:

$$I_2 = |I_{21} + I_{22}|,$$

$$I_{21} = it \int_{|x|>\varepsilon} \left(e^{itx} - 1\right)\left(F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)\right) dx\,,$$

$$I_{22} = -it^2 \int_{|x|>\varepsilon} x\left(F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)\right) dx.$$

Ары қарай былай жаза аламыз ((1.1.21) мен (1.1.22) қатынастарының дәлелдеуін қараңыз):

$$|I_{21}| \le |t| \int_{|x|>\varepsilon} \left|e^{itx} - 1\right|\left|F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)\right| dx \le$$

$$\le |t| \int_{-\infty}^{\infty} \left|\left(e^{itx} - 1\right)\right|\left|F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)\right| dx \le t^2 \nu\left(F_{nj}, \Phi_{nj}\right).$$

$\nu\left(F_{nj},\ \Phi_{nj}\right)$ үшін (1.1.22) мен (1.1.23) теңсіздіктері дұрыс, осыдан келесі қатынасты аламыз:

$$\sup_{|t|\le T} \sum_{j \in A_n} |I_{21}| \to 0, (n \to \infty).$$

Енді, егер (1.1.33), (1.1.34) қатынастарын пайдалансақ, онда келесі бағаны аламыз:

$$I_{22} \le t^2 \int_{|x|>\varepsilon} |x|\left|F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)\right| dx \le$$

$$\leq t^2\left[\int\limits_{|x|>\varepsilon}|x|\tilde{F}_{nj}(x)dx+\int\limits_{|x|>\varepsilon}|x|\widetilde{\Phi}_{nj}(x)dx\right]\leq$$

$$\leq t^2\left[\int\limits_{|x|>\varepsilon}x^2dF_{nj}(x)+\int\limits_{|x|>\varepsilon}x^2\Phi_{nj}(x)\right]. \qquad (1.1.35)$$

Сонымен бірге, (1.1.28), (1.1.32), (1.1.35) қатынастарынан мынадай теңсіздіктер шығатыны да айқын:

$$\sum_{j\in A_n}\left|f_{nj}(t)-\varphi_{nj}(t)\right|\leq$$

$$\leq\frac{|t|^3}{2}\cdot\varepsilon\sum_{j\in A_n}\sigma_{nj}^2+t^2\sum_{j\in A_n}\left[\int\limits_{|x|>\varepsilon}x^2dF_{nj}(x)+\int\limits_{|x|>\varepsilon}x^2\Phi_{nj}(x)\right]+\sum_{j\in A_n}|I_{21}|. \qquad (1.1.36)$$

$\Phi_{nj}(x)=\Phi\left(x/\sigma_{nj}\right)$ болғандықтан, A_n жиынының құрылымын ескере отырып, (1.4) теңдіктен мынаны аламыз:

$$\sum_{j\in A_n}\int\limits_{|x|>\varepsilon}x^2\Phi_{nj}(x)=\sum_{j\in A_n}\sigma_{nj}^2\int\limits_{|x|>\varepsilon\sigma_{nj}}x^2\Phi(x)\leq$$

$$\leq\sum_{j\in A_n}\sigma_{nj}^2\int\limits_{|x|>\varepsilon\alpha_j^{-\frac{1}{4}}}x^2d\Phi(x)\leq\int\limits_{|x|>\varepsilon\alpha_n^{-\frac{1}{4}}}x^2d\Phi(x)\to 0\ \ (n\to\infty). \qquad (1.1.37)$$

(1.1.37) формуласындағы соңғы қатынас дисперсияның ақырлылығынан және (1.1.5) шартынан шығады. Осындай қатынастар $\tilde{F}_{nj}$-дегі қосылғыштар үшін де дұрыс болатыны түсінікті.

Ақыр соңында, (1.1.4), (1.1.36), (1.1.37) қатынастарынан, ε кез келген оң сан екендігін ескере отырып және теорема 1- ден

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{|t|\leq T}\sum_{j\in A_n}\left|f_{nj}(t)-\varphi_{nj}(t)\right|=0$$

болатындығын аламыз.

Теорема 1.1.2 толық дәлелденді. ■

Ескерту 1.1.5. Кездейсоқ шаманың үлестірім функциясы оның сипаттамалық функциясы арқылы бірмәнді анықталатындықтан, орталық шектік теореманың (ОШТ) орындалуының сипаттамалық функциялар терминдегі қажетті және жеткілікті шарттарын табу кездейсоқ шамаларды қосу теориясы үшін аса маңызды. Айтылған жайттың маңыздылығы тағы

мынада: қосылғыштардың үлестірімдеріне қойылатын талаптарды үлестірімдер терминінде емес, сипаттамалық функциялар терминінде жазу және тексеру әдетте әлдеқайда оңай болып келеді.

Ескерту 1.1.6. Теорема 1.1.2 Линдеберг-Феллердің белгілі классикалық шектік теоремасын маңызды түрде жалпыландырады. Идеялық тұрғыдан алғанда теорема 1.1.2- нің ықтималдықтық мағынасы мынаған келтіріледі: алдын-ала (теорема 1.1.1-дегі сияқты) бірқалыпты шексіз аздық шартын қанағаттандыратын кездейсоқ шамалар тізбекшесі (ішкі тізбегі) бөлініп алынады, сосын олар (тізбекше) үшін Линдебергтің классикалық шарты тексеріледі де, алынған нәтиже жалпы тізбекке көшіріледі.

Теорема 1.1.2-нің дәлелдеуіне аздаған қажетті техникалық өзгерістер енгізу арқылы 1) және 2) шарттары біріктірілген келесі теореманың дұрыстығын көреміз.

Теорема 1.1.3. Айталық (1.1.4) шарты орындалсын делік.

Онда $L(F_n, \Phi) \to 0$ жинақталуы орындалуы үшін кез келген $T > 0$ үшін $n \to \infty$ кезде

$$\sup_{|t|\le T} \sup_{j} \left| f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t) \right| \to 0, \qquad (1.1.38)$$

шегі орындалуы қажетті және жеткілікті.

Бұл теорема [15] жұмыста қарастырылып, дәлелденген шектік теореманың сипаттамалық функциялар терминіндегі аналогы болады.

Біздің диссертациямызда сонымен бірге [22] жұмыстағы нормал үлестірімге қатысты бір бағалауды пайдалану арқылы тағы бір классикалық емес шектік теорема дәлелденген, бірақ ол қосымша бірқатар жаңа мәліметтерді келтіруге алып келетіндіктен әрі еш ғылыми журналда жарияланбағандықтан, сәйкес нәтижелерді диссертацияға енгізбедік.

2 КЕЙБІР ПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН КОШИ ЕСЕБІ ШЕШІМДЕРІНІҢ ЫҚТИМАЛДЫҚТЫҚ ЖАЗЫЛЫМДАРЫ, АСИМПТОТИКАЛЫҚ БЕТАЛЫСТАРЫ ЖӘНЕ ОРТАЛАНДЫРЫЛУЛАРЫ

2.1 Параболалық теңдеулер үшін Коши есебі шешімдерінің ықтималдықтық жазылымдары және олардың қолданылымдары

Бұл бөлімнің материалдарын баяндау барысында ықтималдықтар теориясынан және кездейсоқ процестер теориясынан белгілі мынандай тақырыптарға қатысты бірқатар нәтижелерді пайдаланатын боламыз: Сигма–алгебраларға байланысты шартты математикалық күтімдер; Кездейсоқ процестермен байланысты сигма – алгебралар; Марковтық кездейсоқ процестер; Кездейсоқ процестің инфинитезималдық операторы. Аталған тақырыптарға байланысты белгілі нәтижелерге және диссертацияда қарастырылатын сұрақтардың тарихы туралы Кіріспеде айтылғанын еске сала кетеміз.

2.1.1 $\boldsymbol{u(t,x)=M_x[\Phi(W_t)exp\{I_2(t)\}exp\{I_3(t)\}]}$ шартты математикалық күтімі үшін дифференциалдық теңдеу

Теорема 2.1.1. Мынадай функцияны (шартты математикалық күтімді) қарастырайық:

$$u(t,x)=M_x\left[\Phi(W_t)e^{\int_0^t g(t-s,W_s)dW_s}\cdot e^{\int_0^t f(t-s,W_s)ds}\right], \qquad (2.1.1)$$

мұндағы $W_t, t\geq 0,$ −Винер процесі, M_x- белгісі бастапқы $t=0$ уақыт сәтінде $x\in R$ нүктесінен шығатын Винер процесінің барлық траекториялары бойынша алынған шартты математикалық күтімді білдіреді: $M_x(\dots)=M\big((\dots)/W_0=x\big)$, ал экспонентаның дәрежесіндегі интеграл - бұл сәйкесінше (орташа квадраттық мағынадағы) стохастикалық Ито интегралы және кездейсоқ функциядан алынған әдеттегі стохастикалық интеграл [29-35].

Қосымша, $f(t,x)$, $g(t,x)$ және $\Phi(x)$ функцияларын t мен x бойынша үзіліссіз және x бойынша өзінің екінші реткі туындыларымен қоса алғанда шенелген функциялар болсын.

Онда (2.1.3) формуласымен анықталған $u(t,x)$ функциясы

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+g(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}+\left[\frac{1}{2}g^2(t,x)+f(t,x)\right]u(t,x), \qquad (2.1.2)$$

$$u(0,x)=\Phi(x),$$

мұндағы $t\geq 0, x\in R=(-\infty,+\infty)$, параболалық теңдеуі үшін Коши есебінің (ықтималдықтық) шешімі болады.

(2.1.1) формуланы басқа түрде, шартсыз математикалық күтім түрінде былайша да жазуға болатынын байқалық:

$$u(t,x) = M\left[\Phi(W_t + x)\exp\{\int_0^t g(t-s,W_s)dW_s + \int_0^t f(t-s,W_s)ds\}\right].$$

(2.1.1′)

Дәлелдеу. Шындығында да, (2.1.1′) формуласы келесі қатынастардан шығады:

$$M_x\left[\Phi(W_t)\exp\{\int_0^t g(t-s,W_s)dW_s + \int_0^t f(t-s,W_s)ds\}\right] =$$

$$= M_x[\Phi((W_t - W_0) + W_0)\exp\{\int_0^t g(t-s,(W_s - W_0) + W_0)dW_s \cdot$$

$$\cdot \exp\{\int_0^t f(t-s,(W_s - W_0) + W_0)ds\}/W_0 = x) =$$

$$= M_x\left[\Phi(\widetilde{W}_t + x)\exp\{\int_0^t g\big(t-s,\widetilde{W}_s + x\big)d\widetilde{W}_s + \int_0^t f\big(t-s,\widetilde{W}_s + x\big)ds\right],$$

$$\widetilde{W}_t = W_t - W_0.$$

Жоғарыда біз $\widetilde{W}_t = W_t - W_0$ процесі (W_0-дан тәуелсіз) Винер процесі болатынын ескердік ((2.1.1′)-те біз, қазір ғана айтылған ескертуді пайдаланып, жаңа анықталған $\widetilde{W}_t$ процесін (Винер процесін) қайтадан W_t арқылы белгіледік).

$$u(0,x) = \lim_{t\downarrow 0} u(t,x) = \Phi(x)$$

бастапқы шартының орындалуы (2.1.1) формуласынан тікелей шығады:

$$u(0,x) = M_x\Phi(W_0) = M(\Phi(W_0)/W_0 = x) = M(\Phi(x)/W_0 = x) = \Phi(x),$$

ал $u'_x(t,x)$, $u''_{xx}(t,x)$ үзіліссіз туындыларының бар болуы (2.1.1′)-ң оң жағын математикалық күтім таңбасының астында x бойынша екі рет дифференциалдаудан шығады.

Мынадай

$$h(t,x) = \int_0^t g(t-s,W_s + x)dW_s + \int_0^t f(t-s,W_s + x)ds,$$

$$v(t,x) = e^{h(t,x)},$$

функцияларын енгізіп, былай жаза аламыз:

$$u(t,x) = M[\Phi(W_t + x)\, v(t,x)],$$

$$u'_x(t,x) = M[\Phi'_x(W_t + x)\, v(t,x) + \Phi(W_t + x)\, v'_x(t,x)] =$$

$$= M[\Phi'_x(W_t + x)\, v(t,x) + \Phi(W_t + x)\, v(t,x)\, h'_x(t,x)],$$

$$u''_{xx}(t,x) = M[\Phi''_{xx}(W_t + x)\, v(t,x) + 2\Phi'_x(W_t + x)\, v(t,x)\, h'_x(t,x) +$$

$$+ \Phi'(W_t + x)\, v(t,x)\left(h'_x(t,x)\right)^2 + \Phi(W_t + x)\, v(t,x)\, h''_{xx}(t,x)\Big] =$$

$$= M\{v(t,x)\,[(\Phi''_{xx}(W_t + x) +$$

$$+2\Phi'_x(W_t + x)\left(\int_0^t g'_x(t - s, W_s + x)dW_s + \int_0^t f'_x(t - s, W_s + x)ds\right)^2 +$$

$$+ \Phi(W_t + x)\left(\int_0^t g'_x(t - s, W_s + x)dW_s + \int_0^t f'_x(t - s, W_s + x)ds\right)^2 +$$

$$+ \Phi(W_t + x)\left(\int_0^t g''_{xx}(t - s, W_s + x)dW_s + \int_0^t f''_{xx}(t - s, W_s + x)ds\right)\Big]\Big\}.$$

Ары қарай жаңа $W_t(\Delta t) = W_{t+\Delta t} - W_{\Delta t}$ Винер процесін енгізелік, онда

$$u(t + \Delta t, x) = M[\Phi(W_t(\Delta t) + W_{\Delta t} + x)\, v(t + \Delta t, x)],$$

мұндағы

$$v(t + \Delta t, x) = exp\{h(t + \Delta t, x)\} =$$

$$= exp\left\{\int_0^{\Delta t} g(t + \Delta t - s, W_s)dW_s + \int_0^{\Delta t} f(t + \Delta t - s, W_s)ds +\right.$$

$$\left. + \int_0^t g(t - s, W_s(\Delta t) + W_{\Delta t})dW_s\,(\Delta t) + \int_0^t f(t - s, W_s(\Delta t) + W_{\Delta t})ds\right\}. \quad (2.1.3)$$

$\mathcal{F}_{\leq \Delta t}$ арқылы барлық $\{W_s \in B,\ 0 \leq s \leq \Delta t,\ B \in \beta(R)\}$ оқиғаларын қамтитын ең кіші σ- алгебраны белгілелік, мұндағы $\beta(R)$- R сан түзуіндегі борельдік σ- алгебра:

$$\mathcal{F}_{\leq \Delta t} = \sigma\{\,\{W_s \in B, 0 \leq s \leq \Delta t, B \in \beta(R)\}.$$

Бізде $W_s(\Delta t)$ процесі $W_{\Delta t}$-дан және $\mathcal{F}_{\leq \Delta t} = \sigma\{W_s : 0 \leq s \leq \Delta t\}$ сигма - алгебрасынан тәуелсіз болатын Винер процесі ([29, 30], [34]).

Ары қарай, (2.1.3)-тің оң жағында тұрған және 0-ден Δt- ға дейінгі интегралдарды қамтитын экспонентаның $\mathcal{F}_{\leq \Delta t}-$ өлшенетіндігін (сондықтан мұндай экспонента $\mathcal{F}_{\leq \Delta t}$ $\sigma -$ алгебрасына байланысты шартты математикалық күтім алған кезде шарттың алдына көбейтінді болып шығып кетеді, ал 0-ден t-ға дейінгі интегралдарды қамтитын экспонента $\mathcal{F}_{\leq \Delta t}-$ сигма-алгебрасынан тәуелсіздігін (сондықтан бұл жағдайдағы шартты математикалық күтім шартсыз математикалық күтімге айналады. Шартты математикалық күтімнің қасиеттерін пайдаланып, мына қатынастарды жаза аламыз:

$$u(t+\Delta t,x)=M[M(\Phi(x+W_s(\Delta t)+W_{\Delta t})v(t+\Delta t,x)/\mathcal{F}_{\le\Delta t})]=$$

$$=Mexp\left\{\int_0^{\Delta t} g(t+\Delta t-s,x+W_s)dW_s+\int_0^{\Delta t} f(t+\Delta t-s,x+W_s)ds\right\}\cdot$$

$$\cdot M[\Phi(x+W_s(\Delta t)+W_{\Delta t})\cdot$$

$$\cdot exp\left\{\int_0^{t} g\big(t+\Delta t-s,W_s(\Delta t)\big)dW_s\,(\Delta t)+\int_0^{t} f\big(t+\Delta t-s,W_s(\Delta t)\big)ds\right\}.$$

(2.1.3′) формуласын пайдаланып, соңғы математикалық күтім $u(t,x+W_{\Delta t})$– ге тең болатынын көреміз. Нәтижесінде келесі теңдікті аламыз:

$$u(t+\Delta t,x)=M\left[e^{\left\{\int_0^{\Delta t} g(t+\Delta t-s,x+W_s)dW_s+\int_0^{\Delta t} f(t+\Delta t-s,x+W_s)ds\right\}}\cdot u(t,x+W_{\Delta t})\right].$$

(2.1.4)

Енді $f(t,x)$, $g(t,x)$ функцияларына қатысты шарттарды ескере отырып және аз Δt $(\Delta t\to 0)$ үшін

$$W_{\Delta t}\sim\sqrt{\Delta t}\,,\qquad W_{\Delta t}^2\sim\Delta t,$$

$$\int_0^{\Delta t} g(t+\Delta t-s,x+W_s)dW_s\sim g(t,x)W_{\Delta t}\,,$$

$$\int_0^{\Delta t}\int_0^{\Delta t} g\big(t+\Delta t-s_1,x+W_{s_1}\big)g\big(t+\Delta t-s_2,x+W_{s_2}\big)dW_{s_1}dW_{s_2}\sim g^2(t,x)W_{\Delta t}^2,$$

$$\int_0^{\Delta t} f(t+\Delta t-s,x+W_s)ds\sim f(t,x)\Delta t,$$

(2.1.4)– формуланың оң жағында тұрған экспонентаны $o(\Delta t)$ ретті дәлдікке дейін жіктеп, мына қатынасты аламыз:

$$u(t+\Delta t,x)=$$

$$=M\left[\left(1+g(t,x)W_{\Delta t}+f(t,x)\Delta t+\frac{1}{2}g^2(t,x)W_{\Delta t}^2+o(\Delta t)\right)u(t,x+W_{\Delta t})\right].$$

(2.1.4′)

Өз кезегінде

$$u(t,x+W_{\Delta t})=u(t,x)+\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\cdot W_{\Delta t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\cdot W_{\Delta t}^2+o(\Delta t).$$

Табылған өрнекті $(2.1.4')$–тың оң жағына қойып және Δt–ға дейінгі реткі мүшелерді ғана қалдырып, мына қатынасты аламыз:

$$u(t+\Delta t,x)=M\left[u(t,x)+\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}W_{\Delta t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}W_{\Delta t}^2+g(t,x)u(t,x)W_{\Delta t}\right.$$

$$\left.+g(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\cdot W_{\Delta t}^2+f(t,x)u(t,x)\cdot\Delta t+\frac{1}{2}g^2(t,x)u(t,x)\cdot W_{\Delta t}^2+o(\Delta t)\right].$$

Соңғы қатынастан біз іздеп отырған математикалық күтімді табамыз. Онда, $MW_{\Delta t}=0,\ \ MW_{\Delta t}^2=\Delta t$ болатынын ескере отырып, мынаны аламыз:

$$u(t+\Delta t,x)=u(t,x)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\cdot\Delta t+g(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\cdot\Delta t+$$

$$+f(t,x)u(t,x)\cdot\Delta t++\tfrac{1}{2}g^2(t,x)u(t,x)\cdot\Delta t+o(\Delta t).$$

Бұдан

$$\lim_{\Delta t\downarrow 0}\frac{u(t+\Delta t,x)-u(t,x)}{\Delta t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+g(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}+$$

$$+\left[\frac{1}{2}g^2(t,x)+f(t,x)\right]u(t,x). \qquad (2.1.5)$$

Осы (2.1.5) теңдігінен $u(t,x)$ функциясының t бойынша оң жақты туындысы бар болатыны шығады. Сонымен қатар, функция үзіліссіз болғандықтан, оң жақты туындымен бірдей болатын екі жақты туындысы да бар болады. Жоғарыда айтылғандарды қорыта келе біз 2.1.1 теореманың дұрыстығына көз жеткіземіз. Теореманы қысқаша қайта тұжырымдалық.

Теорема 2.1.1′. 1.1 Айталық $f(t,x)$, $g(t,x)$ және $\Phi(x)$ функциялары x пен t бойынша үзіліссіз және x бойынша өздері және өздерінің екінші ретке дейінгі туындыларымен қоса шенелген функциялар болсын.

Онда (2.1.1) формуласымен (немесе $(2.1.1')$ формуласымен) анықталған $u(t,x)$ функциясы $t>0,\ x\in(-\infty,+\infty)$, облысында (2.1.2) дифференциалдық теңдеуін қанағаттандырады.

Ескерту 2.1.1. [32] әдебиетте ұқсас теорема $f(t,x)$ пен $g(t,x)$ функциялары уақыттан тәуелсіз функциялар болған жағдайда дәлелденгенін атай кетеміз. Бұл жағдайда аталған теорема алдымен $g(x)=0$ жағдайына дәлелденген, одан соң соңғы нәтиже бастапқы функцияны басқа функцияға алмастыру арқылы есепті $g(x)=0$ жағдайында шешілген есепке келтіру әдісі арқылы алынған. Сонымен қатар [32] - жұмыста бұл теорема басқа, тікелей (шартты математикалық күтімдерді пайдаланусыз) есептеулер арқылы дәлелденгенін айта кетеміз.

2.1.2 $I_1(t)$, $I_2(t), I_3(t)$ функционалдарының бірлескен сипаттамалық функциясы үшін теңдеу

2.1.1. пунктінде дәлелденген соңғы теорема 2.1 $I_1(t) = W_t$, $I_2(t) = \int_0^t g(t-s, W_s)d\,W_s$, $I_3(t) = \int_0^t f(t-s, W_s)ds$ функционалдарының бірлескен сипаттамалық функциясын белгілі бір дербес туындылы параболалық теңдеудің шешімі ретінде табу барысында шешуші рөл атқарады.

Шындығында да, айталық, $\varphi(t,x,z) = \varphi(t,x,z_1,z_2,z_3)$ функциясы $I_1(t)$, $I_2(t)$, $I_3(t)$ функционалдарының (шартты) бірлескен сипаттамалық функциясы болсын:

$$\varphi(t,x,z_1,z_2,z_3) = M_x\left(e^{iz_1I_1(t)+iz_2I_2(t)+iz_3I_3(t)}\right). \qquad (2.1.6)$$

Егер 2.1 - теоремада $\Phi(x)$- тің орнына $\bar{\Phi}(x) = e^{iz_1x}$ функциясын, $g(t,x)$-тің орнына $\bar{g}(t,x) = iz_2g(t,x)$ функциясын, ал $f(t,x)$-тің орнына $\bar{f}(t,x) = iz_3f(t,x)$ функциясын алсақ, онда дәлелденген теоремадан салдар ретінде мынадай тұжырымның дұрыстығын бірден аламыз.

Теорема 2.1.2. Егер $\varphi(t,x,z) = \varphi(t,x,z_1,z_2,z_3)$ функциясы $I_1(t)$, $I_2(t)$, $I_3(t)$ функционалдарының (шартты) бірлескен сипаттамалық функциясы болса, онда бұл функцияны мынадай дербес туындылы теңдеудің шешімі ретінде табуға болады:

$$\frac{\partial\varphi(t,x,z)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi(t,x,z)}{\partial x^2} + iz_2g(t,x)\frac{\partial\varphi(t,x,z)}{\partial x} +$$
$$+\left(iz_3f(t,x) - \frac{z_2^2}{2}g^2(t,x)\right)\varphi(t,x,z), \qquad (2.1.7)$$
$$\varphi(0,x,z) = e^{ixz_1},$$

мұндағы $z = (z_1,z_2,z_3)$.

Бізге қажет $I_1(t), I_2(t), I_3(t)$ функционалдарының (шартсыз) бірлескен сипаттамалық функциясы $\varphi(t,0,z) = \varphi\left(t,0,z_1,z_2,z_3\right)$ болатыны түсінікті.

(2.1.7)- теңдеудің шешімін табу, жалпы жағдайда, тіптен мүмкін емес. Сондықтан (2.1.7)- теңдеудің дербес жағдайын, g және f функциялары уақыт t–дан тәуелсіз болатын жағдайды, қарастырамыз: $g(t,x) = g(x)$, $f(t,x) = f(x)$. Онда (2.1.7)- теңдеудің бұл дербес жағдайына, t бойынша Лаплас түрлендіруін қолдану арқылы, бұл теңдеудің шешуін табу сұрағын әдеттегі (кәдуілгі) жай дифференциалдық теңдеудің шешімін табу мәселесіне келтіруге болады. Ол үшін теңдеудің екі жағын да $e^{-\lambda t}$ $(\lambda > 0)$ шамасына көбейтіп, одан кейін t бойынша нөлден шексіздікке дейін интегралдаймыз.

Егер $\tilde{\varphi}(\lambda,x,z)$ арқылы $\varphi(t,x,z)$ функциясының t бойынша Лаплас түрлендіруін белгілесек, онда осы функция үшін келесі теңдеуді аламыз:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\tilde{\varphi}(\lambda,x,z)}{\partial x^2}+iz_2g(x)\frac{\partial\tilde{\varphi}(\lambda,x,z)}{\partial x}+$$

$$+\left(iz_3f(x)-\frac{z_2^2}{2}g^2(x)-\lambda\right)\tilde{\varphi}(\lambda,x,z)-e^{ixz_1}. \qquad (2.1.8)$$

(2.1.8)-теңдеудің шешімі барлық сан осінде шенелген болуы керектігінен және $|\varphi(t,x,z)|\le 1$ болғандықтан, $|\tilde{\varphi}(t,x,z)|\le 1/\lambda$ болуы керек.

Бұл жағдайда (2.1.8) теңдеу $f(x)$ және $g(x)$ функцияларының барлық үзіліссіздік нүктелерінде орындалады, ал осы функциялардың үзіліс нүктелерінде $\frac{\partial\tilde{\varphi}(t,x,z)}{\partial x}$ туындысы үзіліссіз болады.

Ескерту 2.2. Шекке көшу арқылы (2.1.8) теңдеу әрбір ақырлы интервалда шенелген және бөлікті- тұрақты болатын $f(x)$ және $g(x)$ функциялары үшін де дұрыс болып қала беретініне көз жеткізуге болады.

2.1.3 а) $I(t)=\int_0^t sign\, W_s dW_s$ функционалының үлестірімі

Бізде (2.1.2)- теңдеуде $g(x)=sign\, x,\quad f(x)=0$. Сондықтан (2.1.2)-теңдеуді мына түрде жазуға болады:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=\frac{\partial^2u(t,x)}{\partial x^2}+signx\cdot\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}+\frac{1}{2}u(t,x),$$

$$u(0,x)=1.$$

Ары қарай

$$\varphi(t,x,z)=M_x\left(e^{iz\int_0^t signW_s dW_s}\right),\quad \tilde{\varphi}(\lambda,x,z)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi(t,x,z)dt,$$

және (2.1.8)- теңдеу мына түрде жазылады:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\tilde{\varphi}(\lambda,x,z)}{\partial x^2}+iz\cdot signx\cdot\frac{\partial\tilde{\varphi}(\lambda,x,z)}{\partial x}-\left(\frac{z^2}{2}+\lambda\right)\tilde{\varphi}(\lambda,x,z)=-1. \qquad (2.1.9)$$

(2.1.9)- теңдеуді $x>0$ және $x<0$ жағдайлары үшін бөлек – бөлек жазалық.

$x>0$ болған жағдайда (2.1.9)- теңдеу тұрақты коэффициентті (яғни коэффициенттері x–тен тәуелсіз) мынандай дифференциалдық теңдеуге

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\tilde{\varphi}(\lambda,x,z)}{\partial x^2}+iz\cdot\frac{\partial\tilde{\varphi}(\lambda,x,z)}{\partial x}-\left(\frac{z^2}{2}+\lambda\right)\tilde{\varphi}(\lambda,x,z)=-1, \qquad (2.1.10)$$

ал $x<0$ жағдайында мынандай тұрақты коэффициентті дифференциалдық теңдеуге

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\tilde{\varphi}(\lambda,x,z)}{\partial x^2}-iz\cdot\frac{\partial\tilde{\varphi}(\lambda,x,z)}{\partial x}-\left(\frac{z^2}{2}+\lambda\right)\tilde{\varphi}(\lambda,x,z)=-1. \qquad (2.1.11)$$

айналады. (2.1.10)- теңдеудің біртекті бөлігінің сипаттамалық (характеристикалық) теңдеуінің түбірлері $s_1=iz+\sqrt{2\lambda},\ s_2=-iz-\sqrt{2\lambda}$ болады, ал (2.1.10)- теңдеудің дербес шешімі

$$\tilde{\varphi}_1(\lambda,x,z)=\frac{1}{\frac{z^2}{2}+\lambda}=\frac{2}{2\lambda+z^2}$$

функциясы болады. (2.1.11)- теңдеуді де дәл осылайша шешеміз.

Нәтижесінде, (2.1.10)-шы және (2.1.11)-ші теңдеулердің жалпы шешімдері

$$\tilde{\varphi}(\lambda,x,z)=C_1e^{(-iz+\sqrt{2\lambda})x}+C_2e^{(-iz-\sqrt{2\lambda})x}+\frac{2}{2\lambda+z^2},\qquad x>0,$$

$$\tilde{\varphi}(\lambda,x,z)=C_3e^{(iz+\sqrt{2\lambda})x}+C_4e^{(iz-\sqrt{2\lambda})x}+\frac{2}{2\lambda+z^2},\qquad x<0,$$

мұнда C_1,C_2,C_3,C_4- тұрақтылар, функциялары болатынын аламыз.

$\tilde{\varphi}(\lambda,x,z)$ функциясы шенелген функция болғандықтан, $C_1=0,\ C_4=0$ болатындық шарттарын аламыз, ал $\tilde{\varphi}(\lambda,x,z)$ x бойынша үзіліссіз болғандығынан, соңғы екі теңдеуге $x=0$ мәнін қойып, $C_2=C_3$ теңдігін аламыз. Сол себепті

$$\tilde{\varphi}(\lambda,x,z)=C_2e^{(-iz-\sqrt{2\lambda})x}+\frac{2}{2\lambda+z^2},\ \ x>0,$$

$$\tilde{\varphi}(\lambda,x,z)=C_2e^{(iz+\sqrt{2\lambda})x}+\frac{2}{2\lambda+z^2},\ \ x<0.$$

Ары қарай $\frac{\partial\tilde{\varphi}(\lambda,x,z)}{\partial x}$ туындысының x бойынша үзіліссіздігінен $C_2=0$ шартын аламыз.

Сонымен, (2.1.7)- теңдеудің шешімі мына функция болады:

$$\tilde{\varphi}(\lambda,x,z)=\tilde{\varphi}(\lambda,0,z)=\frac{2}{2\lambda+z^2}=\frac{1}{\lambda\left(1+\frac{z^2}{2\lambda}\right)}.$$

Біздің ендігі мақсатымыз $\tilde{\varphi}(\lambda,0,z)$ функциясын $\varphi(t,0,z)$ функциясының Лаплас түрлендіруі ретінде жазуға болатынын көрсету, яғни

$$\tilde{\varphi}(\lambda,0,z)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi(t,0,z)dt \qquad (2.1.12)$$

жазылымын дәлелдеу. Бұл мақсат үшін $\tilde{\varphi}(\lambda,0,z)$ функциясын $\left|\frac{z^2}{2\lambda}\right|<1$ облысында қатарға жіктелік:

$$\tilde{\varphi}(\lambda,0,z)=\frac{1}{\lambda\left(1+\frac{z^2}{2\lambda}\right)}=\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot z^{2n}}{2^n\lambda^n}=$$

$$=\int_0^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot z^{2n}}{2^n}\cdot\frac{e^{-\lambda t}\cdot t^n}{n!}dt=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\varphi(t,0,z)\,dt\,.$$

Жоғарыда біз мына қатынасты пайдаландық:

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-\lambda tn}\cdot t^n}{n!}dt=\frac{1}{\lambda^{n+1}}.$$

Нөлдік ретті Бессель функциясы мына қатынаспен анықталатынын еске түсірелік:

$$J_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.$$

Онда

$$\tilde{\varphi}(\lambda,0,z)=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(tz^2)^n}{2^n\cdot n!}\right)dt=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}J_0\left(\sqrt{2tz^2}\right)dt.$$

Бұдан

$$\varphi(t,0,z)=J_0\left(\sqrt{2tz^2}\right)=\int_0^{\infty}e^{izx}\cdot f_{I(t)}(x)dx,$$

мұндағы $f_{I(t)}(x)-I(t)$-ның үлестірім тығыздығы.

Кері түрлендіру арқылы және $J_0(x)$– тің жұптығынан келесі теңдікті аламыз:

$$f_{I(t)}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}J_0\left(\sqrt{2tz^2}\right)dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}cos\,z\,x\cdot J_0\left(\sqrt{2tz^2}\right)dt\,.$$

Ары қарай Фурьенің кері косинус- түрлендіруінің формуласын пайдаланып, үлестірім тығыздығы үшін келесі формуланы аламыз:

$$f_{I(t)}(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\left(\left(\sqrt{2t}\right)^2-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{2}{\pi\sqrt{2t-x^2}}, & 0<x<\sqrt{2t},\\ 0, & x\notin\left(0,\sqrt{2t}\right).\end{cases}$$

Демек, $I(t)$ - ның үлестірім функциясы:

$$F_{I(t)}(x)=\int_{-\infty}^{x}f_{I(t)}(x)dx=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{2}{\pi}arcsin\frac{x}{\sqrt{2t}}, & 0<x<\sqrt{2t},\\ 1, & x>\sqrt{2t}.\end{cases}$$

Сонымен, $I(t)=\int_0^t sign\,W_s\,dW_s$ функционалының сипаттамалық функциясы $\varphi(t,0,z)=e^{-\frac{tz^2}{2}}$ болады, яғни $I(t)$- математикалық күтімі нөлге, ал дисперсиясы t–ға тең болатын ($I(t)\sim\mathcal{N}(0,t)$) нормал үлестірілген кездейсоқ

шама болады ([32] жұмыста басқа қарапайым нәтиже алынғанын ескерте кетейік). Бұл нәтижені

$$\frac{2}{2\lambda + z^2} = \int_0^\infty exp\left\{-\lambda t - \frac{tz^2}{2}\right\} dt$$

теңдігінен де тікелей алуға болады ((2.1.12) формуласын қараңыз).

2.1.3 б) $W_t + \int_0^t sign\, W_s dW_s$ функционалының үлестірімі

Алдымен

$$I_1(t) = \int_0^t g_{0,1}(W_s) dW_s,$$

мұндағы

$$g_{0,1}(x) = \frac{1 + sign\, x}{2} = 1, \qquad x > 0; \quad g_{0,1}(x) = 0, x < 0,$$

функционалын қарастырайық. Онда

$$I_1(t) = \frac{1}{2}\left(W_t + \int_0^t sign W_s dW_s\right),$$

нормал үлестірілген кездейсоқ шамалардың қосындысы ретінде нормал үлестірілген кездейсоқ шама болады. $I_1(t)$-ның үлестірім параметрлерін табайық.

$MI_1(t) = 0$ екені айқын, ал дисперсиясы

$$DI_1(t) = \frac{1}{4}\left(t + 2\, cov\left(W_t, \int_0^t sign\, W_s dW_s\right) + t\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + cov\left(W_t, \int_0^t sign W_s dW_s\right)\right).$$

Ары қарай жазуды жеңілдету үшін $f(x) = signx$ деп белгілейік. Онда ковариацияның және (орташа квадраттық мағынадағы) Ито интегралының анықтамалары бойынша

$$cov\left(W_t, \int_0^t f(W_s) dW_s\right) = M\left(W_t \int_0^t f(W_s) dW_s\right) =$$

$$= M\, \text{l.i.m.}_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[f\left(W_{s_{i-1}}\right)\left(W_{s_i} - W_{s_{i-1}}\right) W_t\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} M\left[f\left(W_{s_{i-1}}\right)\left(W_{s_i} - W_{s_{i-1}}\right) W_t\right], \qquad (2.1.13)$$

мұндағы бөлу нүктелері $0 = s_0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_{n-1} < s_n = t$, ал шек $\max_i (s_i - s_{i-1}) \to 0$ бойынша алынады.

Әдеттегідей, $\mathcal{F}_s = \sigma\{W_u : u \le s\}$ арқылы s моментіне дейінгі Винер процесінің мәндері арқылы пайда болған ең кіші σ −алгебраны белгілеп және (2.1.13) формуласындағы i–ші қосылғыш үшін шартты математикалық күтімнің қасиеттерін пайдаланып былай жаза аламыз:

$$M\left[f\left(W_{s_{i-1}}\right)\left(W_{s_i} - W_{s_{i-1}}\right)W_t\right] = MM\left[f\left(W_{s_{i-1}}\right)\left(W_{s_i} - W_{s_{i-1}}\right)W_t/\mathcal{F}_{s_i}\right] =$$

$$= M\left[f\left(W_{s_{i-1}}\right)\left(W_{s_i} - W_{s_{i-1}}\right)M\left(W_t/\mathcal{F}_{s_i}\right)\right] = M\left[f\left(W_{s_{i-1}}\right)\left(W_{s_i} - W_{s_{i-1}}\right)W_{s_i}\right],$$

себебі $f\left(W_{s_{i-1}}\right)\left(W_{s_i} - W_{s_{i-1}}\right)$ кездейсоқ шамасы $\mathcal{F}_{s_i}$ σ −алгебрасына байланысты өлшенімді, ал Винер процесі $\mathcal{F}_s$ σ −алгебралар үйіріне байланысты мартингал құрайды ([30-31]): $M\left(W_t/\mathcal{F}_{s_i}\right) = W_{s_i}, 0 \le s_i \le t$.

Ары қарай $W_{s_{i-1}}$ және $W_{s_i} - W_{s_{i-1}}$ тәуелсіз болғандықтан,

$$M\left[f\left(W_{s_{i-1}}\right)\left(W_{s_i} - W_{s_{i-1}}\right)W_{s_i}\right] =$$

$$= M\left[f\left(W_{s_{i-1}}\right)\left(W_{s_i} - W_{s_{i-1}}\right)\left(W_{s_i} - W_{s_{i-1}} + W_{s_{i-1}}\right)\right] =$$

$$= M\left[f\left(W_{s_{i-1}}\right)\left(W_{s_i} - W_{s_{i-1}}\right)^2 + f\left(W_{s_{i-1}}\right)W_{s_{i-1}} \cdot \left(W_{s_i} - W_{s_{i-1}}\right)\right] =$$

$$= M\left[f\left(W_{s_{i-1}}\right)\left(W_{s_i} - W_{s_{i-1}}\right)^2\right] + M\left[f\left(W_{s_{i-1}}\right)W_{s_{i-1}} \cdot \left(W_{s_i} - W_{s_{i-1}}\right)\right] =$$

$$= Mf\left(W_{s_{i-1}}\right) \cdot M\left(W_{s_i} - W_{s_{i-1}}\right)^2 + Mf\left(W_{s_{i-1}}\right)W_{s_{i-1}} \cdot M\left(W_{s_i} - W_{s_{i-1}}\right) = 0.$$

Жоғарыда біз, Винер процесінің анықтамасы бойынша, $W_{s_{i-1}}$ және $W_{s_i} - W_{s_{i-1}}$ тәуелсіз кездейсоқ шамалар болатынын ескеріп, математикалық күтімнің мультипликативтік қасиетін пайдаландық және

$$Mf\left(W_{s_{i-1}}\right) = MsignW_{s_{i-1}} = 0, \qquad M\left(W_{s_i} - W_{s_{i-1}}\right) = 0$$

болатындықтарын пайдаландық.

Сонымен,

$$cov\left(W_t, \int_0^t signW_s dW_s\right) = M\int_0^t (W_t signW_s)dW_s = 0,$$

демек

$$DI_1(t) = \frac{1}{2}t,$$

яғни

$$I_1(t) \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}t\right).$$

Ақыр соңында,

$$I_2(t) = W_t + \int_0^t signW_s\, dW_s = 2I_1(t) \sim \mathcal{N}(0,2t).$$

2.2 Кейбір кездейсоқ параболалық теңдеулер шешімдерінің ықтималдықтық жазылымдары және асимптотикалық беталыстары

2.2.1 Оң жағы кездейсоқ параболалық теңдеулер үшін Коши есебі шешімінің ықтималдықтық жазылымдары

Бұл пункттегі біздің негізгі мақсатымыз – ол келесі теореманы дәлелдеу.

Теорема 2.2.1. Параболалық теңдеу үшін келесі Коши есебін қарастырайық:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = Au(t,x) + c(t,x),\ \ u(0,x) = f(x), \qquad (2.2.1)$$

мұндағы $t \geq 0,\ x \in \mathbb{R},\ A$– қандай да бір ξ_t Марков процесінің инфинитезималдық операторы, $f(x), c(t,x)$ – үзіліссіз шенелген (жалпы алғанда, кездейсоқ) функциялар.

Онда (2.2.1) есебінің жалғыз (t-ның сызықтық функциясынан жылдамырақ өспейтін) шешімін мынандай шартты математикалық күтім түрінде жазуға болады:

$$u(t,x) = M_x\left[f(\xi_t) + \int_0^t c(t-s,\xi_s)ds\right], \qquad (2.2.2)$$

мұндағы M_x белгілеуі ξ_t процесінің бастапқы $t = 0$ уақыт сәтінде x нүктесінен шығатын барлық траекториялары бойынша алынған шартты математикалық күтіміді білдіреді.

Бұл теореманы дәлелдеу үшін біз алдымен (2.2.1) есебінің жеке жағдайларын қарастырып, сәйкес теоремаларды дәлелдейтін боламыз.

Теорема 2.2.2. Параболалық теңдеу үшін Коши есебін қарастыралық:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = Au(t,x) + c(t,x),\ \ u(0,x) = 0, \qquad (2.2.1')$$

мұндағы $t \geq 0, x \in \mathbb{R},\ A$ – қандай да бір Марков процесі ξ_t - ның инфинитезималдық операторы.

Онда $(2.2.1')$ есебінің шешімін мына түрде жаза аламыз:

$$u(t,x) = M_x\left[\int_0^t c(t-s,\xi_s)ds\right]. \qquad (2.2.2')$$

Дәлелдеу. Бірден айта кетелік, $(2.2.1')$ теңдеудің оң жағындағы функция $c(t,x)$ тек кеңістіктік координанттан ғана тәуелді болатын $(c(t,x) = c(x))$ жағдайда сәйкес теорема [30] жұмыста келтіріліп, дәлелденген.

Алдымен ξ_t процесімен байланысқан, кемімейтін, барлық

$$\{\xi_s \in B, 0 \leq s \leq t, B \in \beta(\mathbb{R})\}$$

оқиғаларын қамтитын, ең кіші сигма – алгебралар ағынын енгізелік:

$$\mathcal{F}_{\le t} = \sigma\{\{\xi_s \in B, 0 \le s \le t\}, B \in \beta(\mathbb{R})\},$$

мұндағы $\beta(\mathbb{R})$ - $\mathbb{R}$ түзуіндегі борелдік $\sigma-$ алгебра (сандық түзудегі мүмкін болатын барлық интервалдарды қамтитын ең кіші $\sigma-$ алгебра).

(2.2.2′)- жазылымды пайдаланып, $u(t,x)$ функциясын $t+\Delta t$ $(\Delta t > 0)$ уақыт сәтінде жазалық:

$$u(t+\Delta t, x) = M_x\left[\int_0^{t+\Delta t} c(t+\Delta t - s, \xi_s)ds\right] = M_x\left[\int_0^{\Delta t} c(t+\Delta t - s, \xi_s)ds + \right.$$

$$\left. + \int_{\Delta t}^{t+\Delta t} c(t+\Delta t - s, \xi_s)ds\right]. \qquad (2.2.3)$$

Бізде

$$\mathcal{F}_{=t} = \left\{\{\xi_t \in B\}, B \in \beta(\mathbb{R})\right\} = \sigma\{\xi_t\}$$

болғандықтан, $\mathcal{F}_{=0} \subseteq \mathcal{F}_{\le \Delta t}$, $\mathcal{F}_{=\Delta t} \subseteq \mathcal{F}_{\le \Delta t}$. Одан бөлек, $\xi_0 -$мен бірге бір $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған ξ кездейсоқ шамасы үшін $M(\xi|W_0) = M(\xi|\mathcal{F}_{=0})$ шартты математикалық күтімі $\mathcal{F}_{=0}$ өлшенетін кездейсоқ шама болады және, шартты математикалық күтімнің қасиеттері бойынша, қандай да бір $m = m(x)$ борелдік функциясы табылады да,

$$M(\xi|\xi_0) = m(\xi_0),\ M(\xi|\xi_0 = x) = M\xi = m(x)$$

қатынастары орындалады.

Сондықтан соңғы (2.2.3) - формуланы мына түрде жаза аламыз:

$$u(t+\Delta t, \xi_0) = M\left[\int_0^{\Delta t} c(t+\Delta t - s, \xi_s)ds + \int_{\Delta t}^{t+\Delta t} c(t+\Delta t - s, \xi_s)ds \middle| \mathcal{F}_{=0}\right] =$$

$$= M\left[M\left(\int_0^{\Delta t} c(t+\Delta t - s, \xi_s)ds + \int_{\Delta t}^{t+\Delta t} c(t+\Delta t - s, \xi_s)ds \middle| \mathcal{F}_{\le \Delta t}\right)\middle| \mathcal{F}_{=0}\right]. \qquad (2.2.3')$$

Жоғарыда біз математикалық күтімнің келесі белгілі қасиетін пайдаландық: егер ξ- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған кездейсоқ шама және $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}$ болатын $\mathcal{F}$-тің ішкі сигма- алгебралары болса, онда

$$M[M(\xi|\mathcal{F}_2)|\mathcal{F}_1] = M(\xi|\mathcal{F}_1) \text{ (а. д.)}$$

(бізде $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_{\le \Delta t}, \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_{=0}$).

Енді (2.2.3′) қатынасынан өзімізге керек шартты математикалық күтімді табамыз. $\int_0^{\Delta t} C(t+\Delta t - s, \xi_s)ds$ кездейсоқ функциясы $\mathcal{F}_{\le \Delta t}$ – да өлшенетін, ал $c(t+\Delta t - s, \xi_0)$ - $\mathcal{F}_{=0}$ - өлшенетін болғандықтан,

$$M\left[M\left(\int_0^{\Delta t} c(t+\Delta t - s, \xi_s)ds \middle| \mathcal{F}_{\le \Delta t}\right)\middle| \mathcal{F}_{=0}\right] =$$

$$= M\left(\int_0^{\Delta t} c(t+\Delta t-s,\xi_s)ds\middle|\mathcal{F}_{=0}\right) =$$

$$= M(c(t+\Delta t,\xi_0)\Delta t + o(\Delta t)|\xi_0) = c(t+\Delta t,\xi_0)\Delta t + o(\Delta t).$$

Ары қарай екінші қос шартты математикалық күтім үшін келесі теңдікті аламыз:

$$M\left[M\left(\int_{\Delta t}^{t+\Delta t} c(t+\Delta t-s,\xi_s)ds\middle|\mathcal{F}_{\le\Delta t}\right)\middle|\mathcal{F}_{=0}\right] =$$

$$= M\left[M\left(\int_0^{t} c(t-s,\xi_{s+\Delta t})ds\middle|\mathcal{F}_{\le\Delta t}\right)\middle|\mathcal{F}_{=0}\right] =$$

$$= M\left[M\left(\int_0^{t} c(t-s,\xi_{s+\Delta t})ds\middle|\mathcal{F}_{=0}\right)\middle|\mathcal{F}_{\le\Delta t}\right] = M(u(t,\xi_{\Delta t})|\mathcal{F}_{\le\Delta t}) =$$

$$= M(u(t,\xi_{\Delta t})|\mathcal{F}_{=\Delta t}) = u(t,\xi_{\Delta t}).$$

Бұл жерде біз ξ_t (Марков) процесінің мына марковтық қасиетті пайдаландық:

$$M(\xi|\mathcal{F}_{\le\Delta t}) = M(\xi|\mathcal{F}_{=\Delta t}).$$

Сонымен,

$$M\left(\int_0^{t} c(t-s,\xi_{s+\Delta t})ds\middle|\mathcal{F}_{=0}\right) = u(t,\xi_{\Delta t})$$

және $u(t,\xi_{\Delta t})$ $\mathcal{F}_{\le\Delta t}$ – өлшенетін болады. Яғни

$$u(t+\Delta t,\xi_0) = c(t+\Delta t,\xi_0)\Delta t + u(t,\xi_{\Delta t}) + o(\Delta t),$$

мұндағы

$$M(u(t+\Delta t,W_0)|\xi_0 = x) = M_x\big(u(t+\Delta t,\xi_0)\big) = u(t+\Delta t,x) =$$

$$= c(t+\Delta t,x)\Delta t + M_x u(t,\xi_{\Delta t}) + o(\Delta t),$$

немесе

$$u(t+\Delta t,x) - u(t,x) = c(t+\Delta t,x)\Delta t + M_x\big(u(t,\xi_{\Delta t}) - u(t,x)\big) + o(\Delta t);$$

Соңғы қатынастың екі жағын да Δt–ға бөліп, $\Delta t \downarrow 0$ кезде шекке көшсек

$$\lim_{\Delta t\downarrow 0}\frac{u(t+\Delta t,x)-u(t,x)}{\Delta t} = Au(t,x) + c(t,x), \qquad (2.2.4)$$

себебі $c(t,x)$ үзіліссіз функция, ал ξ_t процесінің инфинитезималдық операторы A (инфинитезималдық оператордың анықтамасы бойынша) былай анықталады:

$$Au(t,x) = \lim_{\Delta t\downarrow 0}\frac{M_x u(t,\xi_{\Delta t}) - u(t,x)}{\Delta t}.$$

Сонымен, біз t бойынша $u(t,x)$-тің оң жақ туындысы бар екенін дәлелдедік. $u(t,x)$ үзіліссіз функция болғандықтан оның оң жақ туындысына

сәйкес келетін екі жақты туындысы бар болады. Енді теореманың дәлелдеуі (2.2.4) қатынасынан шығады. ■

Теорема 2.2.3.

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = Au(t,x), \qquad u(0,x) = f(x), \qquad (2.2.1'')$$

параболалық теңдеуін қарастыралық, мұндағы $t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}$, A – қандай да бір Марков процесі ξ_t - ның инфинитезималдық операторы, $f \in D_A - A$–ның анықталу облысы.

Онда $(2.2.1'')$ Коши есебінің жалғыз (шенелген) шешімін

$$u(t,x) = M_x f(\xi_t) \qquad (2.2.2'')$$

шартты математикалық күтімі түрінде жазуға болады.

Дәлелдеу. $(2.2.2'')$ шешімінің жалғыздығы – оның Лаплас түрлендіруі

$$v(\lambda,x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} u(t,x)dt$$

функциясы

$$\lambda v(\lambda,x) - Av(\lambda,x) = f(x)$$

теңдеуін қанағаттандыратындығынан және бұл теңдеудің шешімінің жалғыздығынан шығады.

$u(t,x) = M_x f(\xi_t)$ функциясы $(2.2.1'')$ теңдеуінің шешімі болатындығы теорема 2.2.1-ді дәлелдеген кездегідей тікелей тексеріледі. ■

Енді бізге қажетті теорема 2.2.1-дің дәлелдеуі теорема 2.2.2 және теорема 2.2.3-терден бірден шығады (ол үшін (2.2.1) есебінің шешімін $(2.2.1')$ және $(2.2.1'')$ есептерінің шешімдерінің қосындысы ретінде жазуға болатындығын байқау жеткілікті). ■

Соңғы екі теореманы біріктіріп, мынадай теореманы аламыз.

Теорема 2.2.3′. Параболалық теңдеу үшін келесі Коши есебін қарастырайық:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = Au(t,x) + c(t,x),\ \ u(0,x) = f(x), \qquad (2.2.4)$$

мұндағы $t \geq 0,\ x \in \mathbb{R},\ A$ – қандай да бір марковтық процесс ξ_t- ның инфинитезималдық операторы, $f(x), c(t,x)$– үзіліссіз шенелген (жалпы алғанда, кездейсоқ) функциялар,

Онда (2.2.4) есебінің жалғыз (t-ның сызықтық функциясынан жылдамырақ өспейтін) шешімін мынандай шартты математикалық күтім түрінде жазуға болады:

$$u(t,x) = M_x\left[f(\xi_t) + \int_0^t c(t-s,\xi_s)ds\right], \qquad (2.2.4')$$

мұндағы M_x белгілеуі ξ_t процесінің бастапқы $t = 0$ уақыт сәтінде x нүктесінен шығатын барлық траекториялары бойынша алынған шартты математикалық күтіміді білдіреді.

Ары қарай, $W_t, t \geq 0,$ Винер процесінің инфинитезималдық операторы Лаплас операторы $A = d^2/dx^2$ болатынын еске түсіріп, теорема 2.2.3′-тің нәтижесі бойынша мынадай теореманың дұрыстығын аламыз.

Теорема 2.2.4. Жылу өткізгіштік теңдеуі үшін келесі Коши есебін қарастырайық:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + c(t,x), \qquad u(0,x) = f(x), \qquad (2.2.5)$$

мұнда $t \geq 0,\ x \in \mathbb{R},\ f(x), c(t,x)$– үзіліссіз шенелген (жалпы алғанда, кездейсоқ) функциялар.

Онда (2.2.5) есебінің шешімін келесі шартты математикалық күтім түрінде жазуға болады:

$$u(t,x) = M_x\left[f(W_t) + \int_0^t c(t-s, W_s)ds\right] =$$

$$= M\left[f(W_t) + \int_0^t c(t-s, W_s)ds \middle| W_0 = x\right]. \qquad (2.2.6)$$

мұндағы $t \geq 0, x \in \mathbb{R},$ ал $f(x), c(t,x)$ – үзіліссіз және шенелген (жалпы алғанда, кездейсоқ) функциялар, ал M_x белгісі бастапқы $t = 0$ уақыт сәтінде x нүктесінен шығатын W_t процесінің барлық траекториялары бойынша алынған шартты математикалық күтімді білдіреді.

2.2.2 «Ақ шу» типтес процесс арқылы ұйтқытылған жылу өткізгіштік теңдеуі үшін Коши есебі шешімінің асимптотикалық үлестірімі және асимптотикалық беталысы туралы

(2.2.5) теңдеуінің жеке жағдайын, дәлірек айтсақ келесі теңдеуді қарастыралық:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + g(x)\dot{W}_t, \quad u(0,x) = f(x), \qquad (2.2.7)$$

мұндағы $t \geq 0, x \in \mathbb{R},\ f(x), g(x)$- шенелген үзіліссіз функциялар, $\dot{W}_t$ – «ақ шу» $\left(\dot{W}_t dt = dW_t \text{ және } t_1 < t_2 \text{ үшін } \int_{t_1}^{t_2} \dot{W}_t\, dt = W_{t_2} - W_{t_1}\right)$.

2.2.4-теорема бізге (2.2.7) теңдеуінің шешімін мына түрде жазуға мүмкіндік береді:

$$u(t,x) = M_x\left[f\left(\widetilde{W}_t\right) + \int_0^t g(\widetilde{W}_s)\dot{W}_{t-s}\, ds\right], \qquad (2.2.8)$$

мұндағы $\widetilde{W}_s$– қандай да бір басқа (W_t- дан тәуелсіз) Винер процесі, ал M_x таңбасы (2.2.8) - дегі $\widetilde{W}_t$ процесіне қатысты болады.

(2.2.8) дегі екінші интегралда $(t-s)$ - ті s- ке ауыстырып, $u(t,x)$ – ті басқаша, мына түрде жазамыз:

$$u(t,x) = M_x\left[f\left(\widetilde{W}_t\right) + \int_0^t g(\widetilde{W}_{t-s})\,dW_s\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)p(t,x,y)dy +$$

$$+ \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)p(t-s,x,y)dydW_s, \qquad (2.2.9)$$

мұндағы $p(t,x,y)$ – $\widetilde{W}_t$ (Винер) процесінің өту тығыздығы (жылу өткізгіштік теңдеуінің фундаменталдық шешімі):

$$p(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}. \qquad (2.2.10)$$

Келесідей белгілеулерді енгізіп,

$$u_0(t,x) = M_x f\left(\widetilde{W}_t\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)p(t,x,y)dy, \qquad (2.2.10')$$

$$u_1(t,x) = M_x\left(\int_0^t g(\widetilde{W}_{t-s})\,dW_s\right) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)p(t-s,x,y)dydW_s\,, \qquad (2.2.10'')$$

(2.2.7) есебінің шешімін мына түрде жаза аламыз:

$$u(t,x) = u_0(t,x) + u_1(t,x). \qquad (2.2.11)$$

$T > 0$ параметрін енгізелік те, $u_1(t,x)$ функциясын tT уақыт сәтінде жазалық:

$$u_1(tT,x) = \int_0^{tT} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)p(tT-s,x,y)dydW_s =$$

$$= \int_0^{tT} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)p(tT-sT,x,y)dydW_{sT} =$$

$$= \sqrt{T}\int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)p\big((t-s)T,x,y\big)dydW_s(T),$$

мұндағы $W_s(T) = \frac{1}{\sqrt{T}}W_{sT}$ - (жаңа) Винер процесі ([1]).

Онда,

$$\frac{u_1(tT,x)}{\sqrt{T}} = \int_0^t \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)p\big((t-s)T,x,y\big)dy\right)dW_s(T).$$

Келесдей функция енгізелік:

$$\sigma(y) = \sigma_1 I_A(y) + \sigma_2 I_{\bar{A}}(y) = \begin{cases}\sigma_1, & \sigma_1 > 0,\\ \sigma_2, & \sigma_2 < 0,\end{cases}$$

мұндағы $\sigma_1, \sigma_2 -$ тұрақтылар, ал $I_A(y) -$ бұл $A = \{y: y > 0\}$ жиынының индикаторы:

$$I_A(y) = 1, y \in A;\ I_A(y) = 0, y \notin A.$$

Сонымен қатар

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p\big((t-s)T,x,y\big)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)T}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)T}} dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1,$$

$$\int_{0}^{\infty} p\big((t-s)T,x,y\big)dy = \int_{-\infty}^{0} p\big((t-s)T,x,y\big) = \frac{1}{2},$$

болғандықтан

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(y) p\big((t-s)T,x,y\big)\, dy dW_s(T) = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\xi, \qquad (2.2.12)$$

мұндағы $\xi = \frac{1}{\sqrt{t}} W_t(T) = \frac{1}{\sqrt{Tt}} W_{tT}$ - *стандартты нормал кездейсоқ шама*.

Ары қарай былай жаза аламыз:

$$M\left[\frac{u_1(tT,x)}{\sqrt{tT}} - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\xi\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{t} M\left[\int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \big(g(y)-\sigma(y)\big) p\big((t-s)T,x,y\big) dy dW_s(T)\right]^2 =$$

$$= |\text{Итоның стохастикалық интегралының қасиеті бойынша}| =$$

$$= \frac{1}{t} \int_0^t \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \big(g(y)-\sigma(y)\big) p\big((t-s)T,x,y\big) dy \right)^2 ds =$$

$$= \frac{1}{t} \int_0^t \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(g\left(\sqrt{(t-s)T}\, y + x\right) - \sigma\left(\sqrt{(t-s)}\, y + x\right)\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right)^2 ds.$$

Егер $g(y)$ функциясына $|y| \to \infty$ кезде

$$|g(y) - \sigma(y)| \to 0$$

шартын қойсақ, онда (2.2.10) теңдігінен $t \to \infty$ кезде *орташа квадраттық мағынада* (демек: ықтималдық бойынша да, үлестірім бойынша да) келесі жинақталу шығады:

$$\underset{t\to\infty}{l.i.m.} \frac{u_1(t,x)}{\sqrt{t}} = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\xi, \qquad \xi \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Ал бұдан, әрине, $t \to \infty$ кезде

$$\frac{u_1(t,x)}{\sqrt{t}} \overset{ac.}{\sim} \mathcal{N}\left(0, \frac{(\sigma_1+\sigma_2)^2}{4}\right)$$

қатынасын, яғни $u_1(t,x)/\sqrt{t}$ функциясы $t \to \infty$ кезде математикалық күтімі нөлге, ал дисперсиясы $(\sigma_1+\sigma_2)^2/4$ тең болатын асимптотикалық нормал үлестірілген кездейсоқ функция болатынын аламыз.

$u(t,x) = u_0(t,x) + u_1(t,x)$ болатынын ескере отырып, алынған нәтижені мына түрде де жаза аламыз:

$$\frac{u(t,x)-u_0(t,x)}{\sqrt{t}} \overset{\text{ас.}}{\sim} \mathcal{N}\left(0, \frac{(\sigma_1+\sigma_2)^2}{4}\right), t \to \infty. \qquad (2.2.13)$$

Енді алынған нәтижелерді келесі теорема түрінде тұжырымдалық.

Теорема 2.2.5. Айталық $f(x)$, $g(x)$ үзіліссіз және шенелген функциялар болсын.

Егер $|x| \to \infty$ кезде берілген $\sigma(x) = \sigma_1, x > 0$; $\sigma(x) = \sigma_2, x < 0$, функциясы үшін $g(x)$ функциясы $|g(x) - \sigma(x)| \to 0$ шартын қанағаттандырса, онда

$$\frac{u(t,x)-u_0(t,x)}{\sqrt{t}}$$

кездейсоқ функциясының үлестірімі, мұндағы $u_0(t,x) -$ $((2.2.10')$ формуламен анықталған функция, $u(t,x)$ – (2.2.9) формуламен анықталған (оң жағы «ақ шу» типтес процеспен ұйтқытылған) параболалық теңдеу үшін Коши есебінің шешімі, $t \to \infty$ кезде параметрлері $(0, (\sigma_1+\sigma_2)^2/4$) болатын нормал кездейсоқ шамаға үлестірім бойынша (яғни, әлсіз) жинақталады, басқаша айтқанда $t \to \infty$ кезде $[u(t,x) - u_0(t,x)]/\sqrt{t}$ кездейсоқ функциясы параметрлері $(0, (\sigma_1+\sigma_2)^2/4$) болатын асимптотикалық нормал кездейсоқ шама болады ((2.2.14) орындалады).

Теореманың тұжырымын келесі түрде де жазуға болады: $t \to \infty$ кезде

$$u(t,x) \xrightarrow{d} u_0(t,x) + \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\sqrt{t}\,\xi, \quad \xi \sim \mathcal{N}(0,1),$$

мұндағы $\xrightarrow{d}$ үлестірім бойынша (әлсіз) жинақталуды білдіреді.

2.2.3 Оң жағы «Ақ шу» типтес процесс арқылы ұйытқытылған жылу өткізгіштік теңдеуі үшін Коши есебі шешімінің асимптотикалық нормалдылығының стохастикалық дифференциал терминіндегі дәлелдеуі

2.2.3 а). $\eta(t) = \int_0^t f(t,s)dW(s)$ процесінің стохастикалық дифференцалы туралы лемма

Бұл пункттегі біздің мақсатымыз алдыңғы пункттегі (2.2.7) теңдеуінің шешімі болатын (2.2.9)-шы ықтималдықтық формуланы басқаша әдіспен дәлелдеу.

Ол үшін алдымен келесі көмекші лемманы дәлелдейміз.

Лемма 2.2.1. Итоның мынандай (орташа квадраттық мағынадағы) стохастикалық интегралын қарастырайық:

$$\eta(t) = \int_0^t f(t,s)dW(s),$$

мұндағы $W(s)$– Винер процесі, $f(t,s)$ – кездейсоқ емес және $f_t'(t,s)$ дербес туындысымен бірге өз аргументтерінің жиынтығы бойынша үзіліссіз функция болсын.

Онда $\eta(t)$ кездейсоқ процесінің *стохастикалық дифференциалы* келесі түрде жазылады:

$$d\eta(t) = f(t,t)dW(t) + \left(\int_0^t f_t'(t,s)\ dW(s) \right) dt. \qquad (2.2.14)$$

Дәлелдеу. Процестің стохастикалық дифференциалының анықтамасы бойынша, (2.2.14) дұрыстығын көрсету үшін бізге кез келген $0 < t' < t'' < t$ болатын $t' < t''$ нүктелері үшін

$$\eta(t'') - \eta(t') = \int_{t'}^{t''} f(s,s)dW(s) + \int_{t'}^{t''} \int_0^t f_t'(t,s)dW(s)dt$$

қатынасы ақиқат дерлік (а.д.) орындалатынын көрсету керек.

Шындығында да, $0 < t' < t'' < t$ болатын $t' < t''$ нүктелерін қарастырайық және $[t', t'']$ кесіндісін $t' = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t''$ болатындай етіп бөліктерге бөлейік.

Онда

$$\eta(t'') - \eta(t') = \sum_{k=0}^{n-1} [\eta(t_{k+1}) - \eta(t_k)] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\int_0^{t_{k+1}} f(t_{k+1},s)dW(s) - \int_0^{t_k} f(t_k,s)dW(s) \right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s,s)dW(s) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} [f(t_{k+1},s) - f(s,s)]dW(s) + \right.$$

$$\left. + \int_0^{t_k} [f(t_{k+1},s) - f(t_k,s)]dW(s) \right\} =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3. \qquad (2.2.15)$$

Жоғарыда, (2.2.15) қатынаста I_1, I_2, I_3 арқылы сәйкесінше бірінші, екінші және үшінші интегралдарға сәйкес келетін интегралдық қосындылар белгіленді.

Онда $\Delta t_k = [t_{k+1} - t_k]$ үшін $\max_k \Delta t_k \to 0$ кезде:

$$I_1 = \int_{t'}^{t''} f(s,s)dW(s), \tag{2.2.16}$$

$$M|I_2|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} [f(t_{k+1},s) - f(s,s)]^2 ds \to 0, \tag{2.2.17}$$

$$M\left|I_3 - \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{t_k} f_t'(t_k,s)dW(s)\Delta t_k\right|^2 =$$

$$= M\left|\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{t_k} [f_t'(t_k + \theta\cdot\Delta t_k, s) - f_t'(t_k,s)]dW(s)\Delta t_k\right|^2 \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} M\alpha_k^2 + \sum_{k,i} M\alpha_k\alpha_i\,,$$

мұндағы

$$\alpha_k = \int_0^{t_k} [f_t'(t_k + \theta\cdot\Delta t_k, s) - f_t'(t_k,s)]dW(s)\Delta t_k\,.$$

Стохастикалық Ито интегралының қасиеттеріне сәйкес және $f_t'(t,s)$-тің үзіліссіздігіне байланысты $\max_k \Delta t_k \to 0$ кезде

$$\sum_{k=0}^{n-1} M\alpha_k^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta t_k)^2 \int_0^{t_k} [f_t'(t_k + \theta\cdot\Delta t_k, s) - f_t'(t,s)]^2 ds \to 0\,,$$

$$\sum_{k,i} M\alpha_k\alpha_i = 2\sum_{k<i} M\alpha_k\alpha_i =$$

$$= 2\sum_{k<i} M\alpha_k^2 = 2\sum_{k<i} (\Delta t_k)^2 \int_0^{t_k} [f_t'(t_k + \theta\cdot\Delta t_k, s) - f_t'(t,s)]^2 ds \to 0\,.$$

Демек, $\max_k \Delta t_k \to 0$ кезде, орташа квадраттық (демек, ықтималдық бойынша да) жинақталу мағынасында,

$$I_3 - \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta t_k)^2 \int_0^{t_k} f_t'(t_k,s)dW(s)\,\Delta t_k \;\to\; 0. \tag{2.2.18}$$

Бірақ, $\max_k \Delta t_k \to 0$ кезде, орташа квадраттық (демек, ықтималдық бойынша да) жинақталу мағынасында,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{t_k} f_t'(t_k, s) dW(s)\, \Delta t_k \to \int_{t'}^{t''} \int_0^t f_t'(t, s) dW(s) dt.$$

Егер, енді дәлелденген (2.2.15) – (2.2.18) қатынастарды жинақтасақ, онда $\max_k \Delta t_k \to 0$ *а.ә.* түрде

$$\eta(t'') - \eta(t') = \int_{t'}^{t''} f(s, s) dW(s) + \int_{t'}^{t''} \int_0^t f_t'(t, s) dW(s) dt$$

теңдігі орындалатынын аламыз, ал бұл лемманың дұрыстығын көрсетеді. ■

2.2.3 б) (2.2.9) теңдеуі шешімінің асимптотикалық нормалдылығының стохастикалық дифференциал терминдегі дәлелдеуі

Енді алдыңғы пунктте қарастырылған «ақ шу» типтес процеспен ұйтқытылған параболалық теңдеу үшін Коши есебін қарастыралық:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + g(x)\dot{W}_t, \quad u(0,x) = f(x), \qquad (2.2.19)$$

мұндағы $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, $f(x), g(x)$- берілген функциялар, $\dot{W}_t$– «ақ шу» ($\dot{W}_t dt = dW_t$ және $\int_{t_1}^{t_2} \dot{W}_t\, dt = W_{t_2} - W_{t_1}$, $t_1 < t_2$ үшін).

Теорема 2.2.6. Айталық, $g(x)$, $f(x)$– үзіліссіз шенелген функциялар болсын.

Онда (2.2.19) теңдеуі үшін Коши есебінің шешімі бар болады және ол мына түрде жазылады:

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t,x,y) f(y) dy +$$

$$+ \int_0^t \left(\int_{-\infty}^{\infty} p(t-s,x,y) g(y) dy \right) dW_s, \qquad (2.2.20)$$

мұндағы

$$p(t-s,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2(t-s)}}.$$

Дәлелдеу. Алдыңғы пункттегі секілді келесідей белгілеулер енгізелік:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(t,x,y) f(y) dy = u_0(t,x),$$

$$\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} p(t-s,x,y)g(y)dydW(s) = u_1(t,x).$$

Онда (2.2.20) қатынысы

$$u(t,x) = u_0(t,x) + u_1(t,x)$$

түрінде жазылады.

(2.2.19)- теңдеудің екі жағын dt- ға көбейтелік. Онда:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = d_t u(t,x) = \frac{1}{2} u''_{xx}\, dt \; + g(x)dW_t. \qquad (2.2.21)$$

Бізде $v(x,t,s) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t-s,x,y)g(y)dy$ функциясы әрбір x үшін t және s бойынша үзіліссіз функция және оның туындысы да үзіліссіз функция болады. Сондықтан, лемма бойынша, (2.2.20) қатынастан $u(t,x)$ үшін

$$d_t u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} p'_t(t,x,y)f(y)dydt + \int_0^t v'_t(x,t,s)dW_s dt + g(x)dW_t \qquad (2.2.22)$$

болатынын аламыз. Екінші жағынан

$$\frac{1}{2} u''_{xx}(t,x)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} p''_{xx}(t,x,y)f(y)dydt + \int_0^t \frac{1}{2} v''_{xx}(x,t,s)dW_s\, dt. \qquad (2.2.23)$$

Ары қарай, $p(t,x,y)$ және $v(x,t,s)$ функциялары үшін

$$-p'_t(t,x,y) + \frac{1}{2} p''_{xx}(t,x,y) = 0, \qquad (2.2.24)$$

$$-v'_t(x,t,s) + \frac{1}{2} v''_{xx}(x,t,s) = 0, \qquad (2.2.25)$$

қатынастары орындалатындықтан, (2.2.24) – (2.2.25) формулаларды (2.2.21) қатынасына қойып, теореманың дәлелдеуін аламыз. ■

Ең соңында, алдыңғы пункттегі (2.2.7) Коши есебінің шешімінің ықтималдықтық жазылымын беретін (2.2.9) формула осы пункттегі (2.2.20) формуламен толығымен сәйкес келеді. Сондықтан теорема 2.2.5 – ті және оның сәйкес салдарларын (алдыңғы пунктті қараңыз) да жоғарыдағыдай әдіспен де дәлелдеуге болады.

3 КЕЗДЕЙСОҚ ОРТАЛАРДАҒЫ МАГНИТ ӨРІСІ ТЕОРИЯСЫНЫҢ КЕЙБІР АРНАУЛЫ СҰРАҚТАРЫ

3.1 Стохастикалық мультипликативтік интерал үшін Ферстенберг типтес теорема

Кіріспе. Ферстенберг теоремасының классикалық нәтижелері келесі түрде беріледі.

Теорема (Ферстенберг, [79]). Айталық, $A_1, A_2, \ldots$ - тәуелсіз бірдей үлестірілген кездейсоқ матрицалар тізбегі, $A_i \in SL(\nu, R), \nu \geq 3$, $A(n) = A_n \cdot A_{n-1} \cdot \ldots \cdot A_1$ $(A(0) = E -$ бірлік матрица) болсын.

Бекітіліп қойылған $x_0 \in S^{\nu-1}$ үшін

$$x_n = A(n)x_{n-1}/\|A(n)x_{n-1}\|\ ,\ n = 1,2, \ldots,$$

тізбегін анықталық.

Онда белгілі бір шарттар [88] орындалғанда мына қатаң оң анықталған Ляпуновтың *үлкен* (*жоғарғы*) *көрсеткіші* ақиқат дерлік (*а.д.*) бар болады:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln\|A(n)x_0\|.$$

γ -ны есептеу формуласы [80] және [87,88] жұмыстарда келтірілген.

Ферстенбергтің нәтижелері [87] жұмыста (Вирцер) марковтық матрицалар тізбесі үшін жалпыландырылған, яғни, егер $A_1, A_2, \ldots$ марковтық матрицалар тізбегі болса, онда жеткілікті жалпы шарттар орындалған жағдайда $A(n)$ тізбегі үшін Ляпуновтың жоғарғы көрсеткіші γ бар және қатаң оң болатыны дәлелденген. Осы автордың [88] жұмысында Марковтық тізбе құрайтын матрицалардың көбейтінділері үшін Ляпуновтың сипаттамалық көрсеткіштерінің спектрінің қарапайым, яғни әртүрлі, болатындық шарттары келтірілген.

Кездейсоқ Шредингер операторы теориясының жеке, жолақтағы оператор, жағдайында Ляпуновтың барлық көрсеткіштері зерттелінген [89].

Ғылыми әдебиеттерде (кездейсоқ) матрицалардың көбейтіндісінің жоғарғы Ляпунов көрсеткішінің а.д. қатаң оң болатыны туралы нәтижелерді «*Ферстенберг типтес*» теоремалар деп атау қалыптасқан.

Диссертациямыздың үшінші бөлімінің алғашқы пунктіндегі біздің негізгі мақсатымыз – ол «Ферстенберг типтес» теореманың бір нұсқасын матрицалардың арнайы түрдегі көбейтіндісі жағдайы - марковтық кездейсоқ матрицалардың (*стохастикалық*) *мультипликативтік интегралы* (стохастикалық матрицанты) жағдайы үшін дәлелдеу, яғни [80,87,88] жұмыстардың нәтижелерін стохастикалық мультипликативтік интегралдар жағдайына жалпыландыру.

Сонымен

$$G_t = \prod_{s=0}^{t}(E + C(b(s))ds) \qquad (3.1.0)$$

стохастикалық мультипликативтік интегралын қарастыралық, мұндағы $b_s = b(s),\ s \geq 0,$ процесі K компактты Риман көпбейнесіндегі броундық қозғалыс (Винер процесі). Ал өз кезегінде K көпбейнесі үшін оның өлшемі $dim\, K = \nu \geq 3,$

$$ds^2 = \sum_{1 \leq i,j \leq \nu} g_{ij}(x)dx^i dx^j -$$

K-дағы метрика, $x^1, \dots, x^\nu$ – K көпбейнесіндегі локал координаттар болсын. $b(s)$ процесінің генераторы (инфинитезималды операторы) $\frac{1}{2}\Delta$ ретінде анықталады, мұндағы

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{1 \leq i,j \leq \nu} \frac{\partial}{\partial x^i} g_{ij} \sqrt{\det g} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

Бельтрами – Лаплас операторы, $C(\cdot): K \to SL(\nu, R)$ матрица - мәнді функция, ал $SL(\nu, R)$ - ізі (диагоналдық элементтерінің қосындысы) нөлге тең болатын $(tr\ C = \sum_{i=1}^{\nu} c_{ii} = 0)$ ерекшеленбеген (яғни, анықтауышы нөлден өзгеше) $\nu \times \nu$ - өлшемді матрицалардың сызықтық группасы, $g_{ij}(\cdot), c_{ij}(\cdot): K \to R \quad C^\infty(K)$ класына жататын (тегіс) функциялар.

$\frac{1}{2}\Delta$ операты $L^2(K, d\sigma),\ d\sigma = \sqrt{\det g}\, dx,$ Гильберт кеңістігінде өзіне - өзі түйіндес оператор.

(3.1.0) мультипликативтік интегралының формалды анықтамасы оның негізгі қасиеттерінің дәлелдеулерімен бірге біздің диссертацияның Кіріспесінде берілген, қосымша [93,94] әдебиеттерді қараңыз (бірақ, бұл әдебиеттерде мультипликативтік интеграл басқаша белгіленген).

Ары қарайғы біздің зерттеулеріміз үшін аса маңыздылығына байланысты (3.1.0) стохастикалық мультипликативтік интегралының анықтамасына және бізге қажет болатын маңызды қасиеттеріне қысқаша тоқталайық.

$[0, t]$ аралығы бойынша алынған стохастикалық мультипликативтік интеграл (3.1.0) былай құрастырылады:

$[0, t]$ аралығы $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ нүктелері арқылы $[0 = t_0, t_1]$, $[t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n = t]$ аралықтарына (бөліктеріне) бөлінеді де, $[0, t]$ аралығы бойынша алынған интеграл аралықтар бойынша алынған кіші аралық интегралдардың солдан оңға қарай ($[0 = t_0, t_1]$, аралығы бойынша алынған интеграл $[t_1, t_2]$ аралығы бойынша алынған интегралға сол жағынан көбейтіледі, т.с.с. ең соңында $[t_{n-2}, t_{n-1}]$ аралығы бойынша алынған интеграл $[t_{n-1}, t_n = t]$ аралығы бойынша алынған интегралға сол жағынан көбейтіледі) интегралдық көбейтінділері (үзіліссіз функциядан алынған Риман интегралы үшін интегралдық қосынды құрастырғанға ұқсас түрде) түрінде жазылады да, сосын бөліктеулердің максималды ұзындығы $max\, \Delta t_i \longrightarrow 0$ кезде пайда

болатын шек (ал бұл шек бар болады: Кіріспені, не [93,94] – әдебиеттерді қараңыз) ретінде анықталады. Онда

$$D_i = \prod_{i=t_{i-1}}^{t_i} (E + C(b(s))ds) = (E + \Delta t_i C(b(t_i))) + o(\Delta t_i)$$

болатынын ескеріп, стохастикалық мультипликативтік интегралды мына түрде жаза аламыз:

$$G_t = \Omega_0^t(C) = \prod_{s=0}^{t}(E + C(b(s))ds) =$$

$$= \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \prod_{i=0}^{t}(E + \Delta t_i C(b(t_i))) = \lim_{\max \Delta t_i \to 0}(D_n D_{n-1} \dots D_1)$$

Түсініспестік болмас үшін ерекше назар аудара кететін мәселе – ол жоғарыдағы (кездейсоқ) матрицалардың көбейтіндісінен алынған $\lim_{\max \Delta t_i \to 0}$ шегін *а.д.* (*ақиқат дерлік*), басқаша айтқанда 1 (*бірге*) *тең ықтималдықпен* алынған шек деп түсіну қажет. Бұл жайт Винер процесі траекторияларының *а.д.* үзіліссіздігінен және $C(\cdot)$ матрицасының (элементтерінің) жеткілікті тегіс функциялар болатындығынан шығады (бұлар кездейсоқ анализ теориясынан [29-31] белгілі нәтижелер.

$A(t)$- нақты t айнымалысының $n \times n$ өлшемді матрицалық функциясы өзінің анықталу облысында (айталық, (a,b) аралығында) жеткілікті тегіс (айталық, қажетті ретті туындылары бар) және ерекше емес ($detA(t) \neq 0$) матрица болса, онда

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t)X(t), \qquad X(0) = E,$$

теңдеулер жүйесінің шешімі осы теңдеудің *матрицанты* немесе *интегралдық матрицасы* [93], ал біздің қолданатын терминологиямыз бойынша, осы теңдеулер жүйесі бойынша құрастырылған сәйкес *мультипликативтік интегралы* деп аталады және ол

$$\Omega_0^t(A) = \prod_{s=0}^{t}(E + A(s)ds)$$

арқылы белгіленеді.

Егер $\overrightarrow{x_j}(t) = \left(x_{1j}(t), \dots, x_{nj}(t)\right)^*$ вектор – бағаны $X(t)$ матрицасының j-бағаны ($j = 1, 2, \dots, \nu$) болса, онда, анықтама бойынша,

$$\frac{d\overrightarrow{x_j}(t)}{dt} = A(t)\overrightarrow{x_j}(t), \quad \overrightarrow{x_j}(0) = \vec{x}_0,$$

жүйесінің шешімі

$$\vec{x}(t) = \Omega_0^t(A)\vec{x}_0$$

векторы болады (жоғарыдағы $\overrightarrow{x_j}(0)$ векторы тек $j-$ ші компоненті ғана 1 (бір) болатын бірлік вектор).

Мультипликативтік интегралдың (матрицанттың) қасиеттері.

1*. **Якоби тепе – теңдігі**:

$$det\,\Omega_0^t(A) = exp\{\int_0^t Tr\,\big(A(s)\big)ds\}.$$

Сонымен, мәселен, қазіргі біздің қарастырып отырған есебіміздің шарттарында, $Tr\,\big(C(b(s)\big) = 0$ болғандықтан,

$$detG_t = det\,\Omega_0^t = 1.$$

2*.

$$\frac{dY(t)}{dt} = -A^*(t)Y(t), \qquad Y(0) = E,$$

теңдеуі үшін

$$\Omega_0^t(-A^*) = \Big(\big(\Omega_0^t(A)\big)^{-1}\Big)^* = \Big(\big(\Omega_0^t(A)\big)^*\Big)^{-1}.$$

Жеке, $\vec{x}(t)$ векторлар жағдайы үшін, мәселен

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = -A^*(t)\vec{x}(t), \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0,$$

теңдеулер жүйесінің шешімі

$$\vec{x}(t) = \Big(\big(\Omega_0^t(A)\big)^*\Big)^{-1}\vec{x}_0$$

формуласы арқылы жазылады.

3*. Егер $\vec{x}(t),\ \vec{f}(t) - 1 \times n$ вектор – бағандар, $A(t) - n \times n$ – матрица:

$$\vec{x}(t) = \big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big)^*, \qquad \vec{f}(t) = \big(f_1(t), \dots, f_n(t)\big)^*, A(t) = \|a_{ik}(t)\|_{i,k=1}^{n,n}$$

болса, онда

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = A(t)\vec{x}(t) + \vec{f}(t), \qquad \vec{x}(0) = \vec{x}_0\,,$$

теңдеулер жүйесінің шешімі

$$\vec{x}(t) = \Omega_0^t(A)\vec{x}_0 + \int_0^t K(t,\tau)\vec{f}(\tau)d\tau,$$

түрінде жазылады, мұндағы Коши матрицасы $K(t,\tau)$ былай анықталады:

$$K(t,\tau) = \Omega_0^t(A)[\Omega_0^\tau(A)]^{-1}.$$

Аталған $\mathbf{1}^*, \mathbf{2}^*, \mathbf{3}^*$ қасиеттерін төменде пайдаланатын боламыз.

Енді негізгі мақсатымызға, (3.1.0) формуласымен анықталған стохастикалық мультипликативтік интеграл үшін Ферстенберг типтес теореманы дәлелдеуге көшелік.

Сонымен, біз қарастырып отырған жағдайда, кез келген $t \geq 0$ үшін $G_t \in SL(\nu, R)$.

Айталық, енді $\theta_0 \in S^{\nu-1} = \{\theta \in R^\nu: \|\theta\| = 1\}$ және $r_t = \|G_t\theta_0\|$ болсын (біз $\|*\|$ арқылы үнемі сәйкес норманы белгілейтін боламыз: вектор үшін оның ұзындығы, матрица үшін оның матрицалық нормасы, белгіледік).

Мынаған назар аударайық:

$$\|G_t\theta_0\| \leq \|G_t\| \leq \prod_{s=0}^{t} \left(1 + \max_{x \in K} \|C(x)\| ds\right) = e^{t\|C(\cdot)\|},$$

яғни $G_t -$ әрбір ақырлы интервалда шенелген процесс.

G_t үйірі үшін Ляпуновтың жоғарғы көрсеткіші мына формуламен анықталады:

$$\gamma = \lim_{t \to \infty} \frac{lnr_t}{t} \quad (\text{Р} - \text{а. д.}). \tag{3.1.1}$$

Бұл шектің бар болатыны стационар эргодикалық матрицалар тізбегінің көбейтіндісі туралы Оселедец [92] теоремасынан шығады:

$$D_1 = G_1, \quad D_2 = G_2 G_1^{-1}, \ldots, D_n = G_n G_{n-1}^{-1};$$

Біздің жағдайда $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t,$

$$D_n = \prod_{s=t_{n-1}}^{t_n} (E + C(b_s)ds),$$

$$G_n = \prod_{s=0}^{t_n} (E + C(b_s)ds),$$

$$G_1 = D_1, \quad G_2 = D_2 D_1, \ldots, \; G_n = D_n \cdot \ldots \cdot D_1,$$

және $C(b_s)$ процесі - эргодикалы және стационар (матрица – мәнді) Марков процесі болады. Бастапқы $t = 0$ уақыт сәтінде броундық қозғалыс инвариантты үлестірілген деп есептейміз:

$$\pi(\Gamma) = P\{b_0 \in \Gamma\} = \frac{G(\Gamma)}{G(D)},$$

мұндағы $\sigma(dx) = \sqrt{detg(x)}dx -$ K көпбейнесіндегі Риман (бірқалыпты) өлшемі.

(3.1.1.) шегінің бар болатындығы $\|G_t\|$-ның субмультипликативтілігінен шығады:

$$\|D_n \cdot \ldots \cdot D_1\| \leq \|D_n\|\|D_{n-1}\| \ldots \|D_1\|,$$

яғни

$$ln\|D_n \cdot \ldots \cdot D_1\| \leq \sum_{l=1}^{n} ln\|D_l\|.$$

Демек, аддитивті эргодикалық теорема деп аталатын теореманы пайдалансақ, онда мына шек бар болатыны шығады:

$$\gamma = \lim_{t\to\infty} \frac{ln\|G_t\theta_0\|}{t} \ (\text{Р} - a.\text{д.}).$$

Ферстенберг теоремасының ең қиын бөлігі – ол шектің бар болуы емес, ол шектің қатаң оң болуы туралы мәселе.

Ферстенберг типтес теоремалардың көптеген қолданыстары бар. Олардың бірі- Шредингердің бір өлшемді кездейсоқ операторлары үшін локализациялау теориясы [70] және Андерсонның жолақтағы кереге көзді моделі [89].

Қазіргі біздің мақсатымыз– ол магнитогидродинамиканың жылдамдықтар өрісінің кездейсоқ сызықтық моделі үшін Ферстенберг типтес теореманы дәлелдеу мәселелерін қарастырып, зерттеу. Бұл жерде ерекше атап өтетін мәселе - ол бізде модель [77] жұмыстағы секілді тәуелсіз кездейсоқ матрицалардың көбейтіндісіне келтірілетін модель емес, бұл модельдің әлдеқайда жалпыландырылған марковтық сызықтық моделі, дәлірек айтсақ – стохастикалық мультипликативтік интеграл арқылы құрастырылған марковтық сызықтық модель болады.

Алдымен қарастырылатын модельдің қатаң математикалық негіздемелерін берелік.

3.1.1 Марковтық сызықтық модельдегі магнит өрісі

Магниттік диффузиясы υ_m $(\upsilon_m > 0)$ тұрақты болатын берілген сығылмайтын кездейсоқ $\vec{V}(t,x) = (V_1(t,x), V_2(t,x), \ldots, V_\nu(t,x))$ жылдамдықтар өрісіндегі бастапқы үлестірімі $\overrightarrow{H_0}(x) = \langle H_{01}(x),\ H_{02}(x), \ldots,\ H_{0\nu}(x)\rangle$ болатын $\vec{H}(t,x) = \big(H_1(x),\ H_2(x), \ldots,\ H_\nu(x)\big)$ магнит өрісінің теңдеуі мына түрде беріледі

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{H} = \upsilon_m \Delta\vec{H} + rot\big[\vec{V} \times \vec{H}\big], \tag{3.1.2}$$

$$\vec{H}(0,x) = \overrightarrow{H_0}(x),$$

мұндағы $t \geq 0,\ \ x \in R^\nu, \nu \geq 3.$

Егер жылдамдық өрісі $\vec{V}$ мен бастапқы өріс $\overrightarrow{H_0}$ сығылмайтын өрістер болса, яғни

$$div\,\vec{V} = 0,\ \ div\,\overrightarrow{H_0}\ = 0, \tag{3.1.3}$$

және

$$div\,\overrightarrow{H} = 0 \tag{3.1.4}$$

орындалса, онда (3.1.2) жүйесі мына жүйеге келтіріледі:

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{H} = \nu_m \Delta \vec{H} - (\vec{V}, \nabla)\vec{H} + (\vec{H}, \nabla)\vec{V}, \qquad \vec{H}(0,x) = \overrightarrow{H_0}(x). \tag{3.1.5}$$

Ескерту 3.1.1. (3.1.4.) шарты (3.1.3.) шартының салдары болып табылады: $div\overrightarrow{H_0}(x) = 0$ шартынан кез келген $t \geq 0$ үшін $div\,\overrightarrow{H}(t,x) = 0$ болатыны шығады.

Шындығында да, (3.1.2.) қатынастың екі жағына (кеңістіктік аргумент бойынша) дивергенция амалын қолданып, $div\,rot = 0$ теңдігін пайдаланып,

$$\frac{\partial}{\partial t} div\vec{H} = \nu_m \Delta\left(div\vec{H}\right)$$

болатынын аламыз. Демек, жылуөткізгіштік теңдеуі үшін шешімінің жалғыздық шарты бойынша, егер $t = 0$ болғанда $div\,\overrightarrow{H_0} = 0$ шарты орындалса, онда ол шарт барлық $t > 0$ үшін де орындалады, яғни (3.1.4) орындалады.

Марковтық сызықтық модель (марковтық Хаббл ағыны) деп

$$\vec{V}(t,x) = C(b_t)x, \tag{3.1.6}$$

моделін айтамыз, мұндағы $b_t = b(t)$ процесі және $C(\cdot)$ матрицасы жоғарыда, (3.1.0) стохастикалық мультипликативтік интегралын анықтаған кезде, енгізілген сәйкес процесс пен матрица.

Енді (3.1.5) есебінің (3.1.6) моделіндегі шешімінің айқын түрін табалық.

Ол үшін біз алдымен (3.1.5) теңдеуінің дербес шешімін мына түрде іздейміз

$$\vec{H}\left(t,x,\vec{k}\right) = \vec{h}\left(t,\vec{k}\right)exp\left\{i\left(\vec{\varkappa}\left(t,\vec{k}\right),x\right)\right\}, \tag{3.1.7}$$

мұндағы $t \geq 0$, $\vec{k} \in R^{\nu}$, i – жорамал бірлік және $\vec{\varkappa}\left(0,\vec{k}\right) = \vec{k}$.

Бірден айта кетелік, онда (3.1.5) теңдеудің жалпы шешімін табу үшін (3.1.7) формуламен анықталған $\vec{H}\left(t,x,\vec{k}\right)$ шешімін $\vec{k}$ бойынша барлық R^{ν} кеңістігінде интегралдау керек:

$$\vec{H}(t,x) = \int\limits_{R^{\nu}} \vec{H}\left(t,x,\vec{k}\right)\left(\vec{k}\right)d\vec{k} = \int\limits_{R^{\nu}} \vec{h}\left(t,\vec{k}\right)e^{i\left(\vec{\varkappa}\left(t,\vec{k}\right),x\right)}\,d\vec{k}\,. \tag{3.1.8}$$

Бұдан, бастапқы шарт үшін

$$\vec{H}(0,x) = \overrightarrow{H_0}(x) = \int\limits_{R^{\nu}} \vec{H}\left(0,x,\vec{k}\right)\left(\vec{k}\right)d\vec{k} = \int\limits_{R^{\nu}} \vec{h}\left(0,\vec{k}\right)e^{i\left(\vec{\varkappa}\left(0,\vec{k}\right),x\right)}\,d\vec{k} \tag{3.1.9}$$

қатынасын аламыз.

Ал қазіргі біздің мақсатымыз, (3.1.7) формуласы арқылы анықталған $\vec{H}(t,x,\vec{k})$ дербес шешімін табу. Ол үшін $g(t,\vec{k},x)=exp\{i(\vec{\varkappa}(t,\vec{k}),x)\}$ деп белгілеп, дербес шешімді $\vec{H}(t,x,\vec{k})=\vec{h}(t,\vec{k})g(t,\vec{k},x)$ түрінде ізделік. Координаттары бойынша жазсақ:

$$H_j(t,x,\vec{k})=h_j(t,\vec{k})g(t,\vec{k},x).$$

Ары қарай осы теңдіктен t бойынша туынды алайық:

$$\frac{\partial H_j}{\partial t}=\frac{\partial h_j(t,\vec{k})}{\partial t}\cdot g(t,\vec{k},x)+h_j(t,\vec{k})\cdot g(t,\vec{k},x)\cdot\left(i\sum_{l=1}^{\nu}\frac{\partial \varkappa_j}{\partial t}x_l\right);$$

$$\frac{\partial H_j}{\partial x_l}=h_j(t,\vec{k})\cdot g(t,\vec{k},x)\cdot(i\varkappa_l);\qquad \frac{\partial^2 H_j}{\partial x_l^2}=h_j(t,\vec{k})\cdot g(t,\vec{k},x)\cdot(-\varkappa_l^2).$$

$$\sum_{l=1}^{\nu}\frac{\partial^2 H_j}{\partial x_l^2}=h_j(t,\vec{k})\cdot g(t,\vec{k},x)\cdot\left(-\sum_{l=1}^{\nu}\varkappa_l^2\right)=-h_j(t,\vec{k})\cdot g(t,\vec{k},x)\cdot\vec{\varkappa}^{\,2},$$

$$\vec{\varkappa}^2=\vec{\varkappa}^2(t,\vec{k})=\left(\vec{\varkappa}(t,\vec{k}),\vec{\varkappa}(t,\vec{k})\right)=\sum_{l=1}^{\nu}\varkappa_l^2.$$

(3.1.7.)-ні (3.1.5.)-ке қойып, сосын алынған теңдіктің нақты және жорамал бөліктерін теңестіріп, келесі теңдіктерді аламыз:

$$\frac{\partial h_j(t,\vec{k})}{\partial t}\cdot g(t,\vec{k},x)+h_j(t,\vec{k})\cdot g(t,\vec{k},x)\cdot\left(i\sum_{l=1}^{\nu}\frac{\partial \varkappa_j}{\partial t}x_l\right)=$$

$$=-\upsilon_m h_j(t,\vec{k})\cdot g(t,\vec{k},x)\cdot\vec{\varkappa}^{\,2}-\sum_{l=1}^{\nu}\sum_{q=1}^{\nu}c_{lq}x_q h_j(t,\vec{k})\cdot g(t,\vec{k},x)\cdot(i\varkappa_l)+$$

$$+\sum_{l=1}^{\nu}h_j(t,\vec{k})\cdot g(t,\vec{k},x)c_{jl}\,.$$

Жорамал бөлігінің алдындағы сәйкес коэффициенттерді теңестірейік:

$$\sum_{l=1}^{\nu}\frac{\partial \varkappa_j}{\partial t}x_l=\sum_{l=1}^{\nu}\left(\sum_{q=1}^{\nu}c_{lq}x_q\right)\varkappa_l\,,$$

$$\left(\frac{\partial\vec{\varkappa}}{\partial t},x\right)=-(Cx,\vec{\varkappa})=-(C^*\vec{\varkappa},x)\,,$$

яғни

$$\frac{d}{dt}\vec{\varkappa}(t,\vec{k})=-C^*(b_t)\vec{\varkappa}(t,\vec{k}),\qquad \vec{\varkappa}(0,\vec{k})=\vec{k},\tag{3.1.10}$$

Енді сәйкес нақты бөліктерінің алдындағы коэффициенттерін теңестірейік:

$$\frac{\partial h_j(t,\vec{k})}{\partial t} = -\upsilon_m h_j(t,\vec{k}) \cdot \vec{\varkappa}^{\,2} + \sum_{l=1}^{\nu} h_j(t,\vec{k}) \cdot c_{jl}\,.$$

Бұдан

$$\frac{d}{dt}\vec{h}(t,\vec{k}) + \upsilon_m \vec{\varkappa}^2 \vec{h}(t,\vec{k}) = C(b_t)\vec{h}(t,\vec{k}),\ \ \vec{h}(0,\vec{k}) = \overrightarrow{h_0}(\vec{k}), \qquad (3.1.11)$$

мұндағы $\vec{\varkappa}^2 = \left(\vec{\varkappa}(t,k),\ \vec{\varkappa}(t,k)\right)$ және $div\overrightarrow{H_0}(x) = 0$ шарты $\left(\overrightarrow{h_0},\ \vec{k}\right) = 0$ шартына эквивалентті. Сонымен қатар $div\,\vec{V} = 0$ шарты $\mathrm{C}(b_t)$, $C^*(b_t)$ матрицаларының іздері нөлге тең болатынын көрсетеді:

$$Tr\ C(b_t) = Tr\ C^*(b_t) = 0,$$

яғни $C(b_t) \in SL(\nu, R)$.

Бұл шарттың орындалатынын көрсетейік:

$$V_l = \sum_q c_{lq} x_q\ ; \qquad \frac{\partial V_j}{\partial x_l} = c_{jl}(b_t),\ \ \frac{\partial V_j}{\partial x_j} = c_{jj}(b_t),$$

Онда

$$div\,\vec{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial V_\nu}{\partial x_\nu} = c_{11}(b_t) + c_{22}(b_t) + \cdots + c_{\nu\nu}(b_t) = Tr\ C(b_t) = 0,$$

демек $Tr\ C^*(b_t) = 0$.

Енді (3.1.0) теңдеуіне қайта оралалық. Анықтама бойынша

$$G_t = \prod_{s=0}^{t}(E + C(b(s))ds)$$

стохастикалық мультипликативтік интегралы

$$\frac{d}{dt}G_t = C(b_t)G_t, \quad G_0 = E,$$

теңдеулер жүйесінің шешімі ретінде анықталған болатын.

Енді мультипликативтік интегралдың жоғарыда келтірілген $\mathbf{2}^*$ қасиетін (3.1.10)- теңдеуге, ал $\mathbf{3}^*$ қасиетін (3.1.11) теңдеуге қолданып, бұл теңдеулердің шешімдерін сәйкес мына түрлерде жаза аламыз:

$$\vec{\varkappa}(t,\vec{k}) = (G_t^*)^{-1}\vec{k}\,, \qquad (3.1.12)$$

$$\vec{h}(t,\vec{k}) = G_t\overrightarrow{h_0} exp\left\{-\upsilon_m \int_0^t \vec{\varkappa}^2(s,\vec{k})ds\right\}. \qquad (3.1.13)$$

Ең соңында, (3.1.6) моделіндегі (3.1.5) есебінің жалпы шешімін табу үшін магнит өрісінің $\overrightarrow{H_0}(x)$ бастапқы шартын Фурье интегралына жіктеу

керек, содан соң бұл жіктеудің әр компонентін (3.1.10), (3.1.11) жүйелер бойынша эволюция жасату керек. Басқаша айтқанда, егер $\widehat{\overrightarrow{H_0}}(\vec{k})$- бастапқы магнит өрісі $\overrightarrow{H_0}(x)-$тің Фурье түрлендіруі болса, онда

$$\overrightarrow{H_0}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\nu/2}}\int\limits_{R^\nu} e^{i(\vec{k},x)}\,\widehat{\overrightarrow{H_0}}(\vec{k})d\vec{k}\,.$$

Енді жоғарыда жазған (3.1.9) формуласына (3.1.10), (3.1.11) теңдеулердің $\vec{\varkappa}(0,\vec{k})=\vec{k},\quad \vec{h}(0,\vec{k})=\overrightarrow{h_0}(\vec{k})$ шарттарын қойып,

$$\overrightarrow{H_0}(x)=\int\limits_{R^\nu}\vec{h}(0,\vec{k})e^{i(\vec{\varkappa}(0,\vec{k}),x)}\,d\vec{k}=\int\limits_{R^\nu}\overrightarrow{h_0}(\vec{k})e^{i(\vec{k},x)}\,d\vec{k}$$

болатынын, және алдыңғы Фурье түрлендіруін ескерсек,

$$\overrightarrow{h_0}(\vec{k})=\frac{1}{(2\pi)^{\nu/2}}\widehat{\overrightarrow{H_0}}(\vec{k})$$

қатынасын аламыз.

Сонымен, бастапқы магнит өрісі үшін

$$\overrightarrow{H_0}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{\nu}{2}}}\int\limits_{R^\nu}\widehat{\overrightarrow{H_0}}(\vec{k})e^{i(\vec{k},x)}\,d\vec{k}$$

формуласын аламыз.

Ақыр соңында, (3.1.8) формулаға (3.1.12) – (3.1.13) формулалармен табылған $\vec{\varkappa}(t,\vec{k})$ және $\vec{h}(t,\vec{k})$ – ның мәндерін қойып,

$$G_t\overrightarrow{h_0}(\vec{k})=\frac{1}{(2\pi)^{\nu/2}}\,G_t\widehat{\overrightarrow{H_0}}(\vec{k})$$

болатынын ескеріп, (3.1.5) теңдеуінің (3.1.6) марковтық сызықтық моделіндегі шешімі үшін

$$\vec{H}(t,x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{\nu}{2}}}\int\limits_{R^3}G_t\,\widehat{\overrightarrow{H_0}}(\vec{k})exp\left\{i\left((G_t^*)^{-1}\vec{k},x\right)-\upsilon_m\int\limits_0^t\left((G_s^*)^{-1}\vec{k}\right)^2ds\right\}d\vec{k}. \tag{3.1.14}$$

формуласын аламыз.

Сонымен бірге магнит өрісінің толық магниттік энергиясы $\mathcal{E}(t)$ үшін мына формуланың дұрыс болатынын көрсету де қиын емес:

$$\mathcal{E}(t)=\int\limits_{R^3}\vec{H}^2\,(t,x)dx=\int\limits_{R^3}\left(G_t\overrightarrow{H_0}(\vec{k})\right)^2exp\left\{-2\upsilon_m\int\limits_0^t\left((G_s^*)^{-1}\vec{k}^2\right)ds\right\}dk. \tag{3.1.15}$$

Теорема 3.1.1. (3.1.6) марковтық сызықтық моделіндегі (3.1.5) магниттік өрісі үшін (3.1.14) интегралдық жазылымы, ал толық магниттік энергия үшін (3.1.15) интегралдық жазылымы дұрыс.

Сонымен, (3.1.14), (3.1.15) формулаларынан көрініп тұрғандай, G_t стохастикалық мультипликативтік интегралының Ляпунов көрсеткіштерінің $t \to \infty$ кездегі асимптотикаларын білу туралы сұрақ $\vec{H}(t,x)$ магнит өрісі мен $\mathcal{E}(t)$ магнит энергиясының $t \to \infty$ кездегі асимптотикаларын (асимптотикалық беталыстарын) зерттеу үшін аса маңызды.

Диссертациямыздың осы ұсынылып отырған бөлімінің екінші жартысы дәл осы мәселелерге арналған.

Сонымен қатар, бұрын да айтып кеткеніміздей, мультипликативтік интегралдың 1^* қасиетінен (Якоби тепе – теңдігінен), егер $trC(b_t) = 0$ болса, онда $detG_t = det\,\Omega_0^t(C) = 1$ болатынын көреміз. Бұдан G_t стохастикалық мультипликативтік интегралының (матрицанттың) барлық Ляпунов көрсеткіштерінің қосындысы нөлге тең болатыны шығады. Демек, Ляпуновтың жоғарғы көрсеткіші қатаң оң немесе нөлге тең болатыны туралы қорытындыға келеміз.

3.1.2 Хермендер теоремасы және кейбір көмекші нәтижелер

Жоғарыда, жұмысымыздың $1^{\mathbf{0}}$ пунктінде (3.1.0) формуласымен анықталған

$$G_t = \prod_{s=0}^{t}(E + C(b_s)ds)$$

мультипликативтік интегралы $G = SL(\nu, R)$-да Марков процесі болады, ал (b_t, G_t) жұбы $K \times G$-да өзгешеленген диффузиялық процесс болады. Диффузиялық процестердің осы секілді арнайы түрлерін зерттеудің Хермандер ұсынған әдісі белгілі. Хермандер *өзгешеленген* эллипстік-параболалық операторлар теориясына сүйене отырып, сәйкес техникалық аппарат жасап шығарған [95]. Бұл теорияның біздің мақсаттарымызға қолдануға лайықталған кейбір нәтижелерін келтіре кетелік.

Айталық, K- тегіс компакт көпбейне, $X_1, X_2, \dots, X_m, Y -$ K көпбейнесіндегі C^∞ класына жататын векторлық өрістер болсын. Жалпы жағдайда келесі өзгешеленген эллипстік-параболалық дифференциалдық операторын қарастырайық:

$$A = \sum_{i=1}^{m} X_i^2 + Y\,, \quad m \le \dim K. \tag{3.1.16}$$

Стохастикалық дифференциалдық теңдеулер теориясы негіздері аппаратын пайдаланып, A операторы инфинитезималдық операторы болатын үзіліссіз Феллер процесі x_t бар болатынын (табылатынын) көрсетуге болады

[30, 31]. Айталық, $P(t,x,\Gamma)-$ бұл (әрине біртекті болатын) процестің өту функциясы болсын.

Мынадай сұрақ туатыны орынды: $\{X_1, X_2, \dots, X_m, Y\}$ өрістеріне қандай шарттар қойғанда x_t процесінің қандай да бір тегістік қасиеттеріне ие болатын өту тығыздығы $p(t,x,y)$, яғни мына

$$P\{t,x,\Gamma\} = \int_{\Gamma} p(t,x,y)dy\,,\ \ \Gamma \in \beta(K)), \tag{3.1.17}$$

мұндағы $\beta(K)$ - K көпбейнесіндегі борельдік $\sigma-$ алгебра, шартын қанағаттандыратын $p(t,x,y)$ бар болады?

Жауап мына, Хермандер теоремасы деп аталатын, теорема арқылы беріледі.

Теорема (Хермандер, [95]). Айталық, K көпбейнесіндегі X_1, X_2, …, X_m, Y өрістері және келесідей мүмкін болатын барлық коммутаторлар

$$[X_{i_1}, Y], \left[X_{i_2}, [X_{i_1}, Y]\right], \left[\left[X_{i_1}, Y\right], Y\right], \dots, \left[X_{i_s}, \dots, [X_{i_1}, \underbrace{Y], Y], \dots, Y}_{l}]\right],\ \ s \geq 1,\ l \geq 1, \tag{3.1.18}$$

арқылы пайда болған (жасалынған) Ли алгебрасы $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(X_1,\ X_2, \dots, X_m, Y)$ әрбір $x \in K$ нүктесінде максималды өлшемге ие болсын: $dim\mathfrak{C} = dimK$.
(Y өрісінің өзі алгебраға кірмейтініне назар аударамыз!).

Онда $t > 0;\quad x, y \in K$, аргументтер жиынтығы бойынша тегіс (C^∞ класына жататын) өту тығыздығы $p(t,x,y)$, $t > 0$ бар болады.

Біз Y өрісін коммутаторлар тізіміне енгізбегенімізге назар аударыңыз. Енді $p(t,x,y)$ өту тығыздығының оң болуы туралы сұрақтарды қарастырайық.

Теорема 3.1.2. Айталық, K- компакт метрикалық кеңістік, $d(x,y)$- сәйкес метрика, $\beta(K)-$ K-дағы ашық ішкі жиындар арқылы пайда болған борельдік σ-алгебра болсын. Сондай-ақ, $x(t)$- осы K-дағы (ықтималдық бойынша үзіліссіз) Марков процесі, $\mu(dx)-$ $\beta(K)$ сигма – алгебрасындағы негізгі өлшем, ал $p(t,x,y)$- $x(t)$ процесінің $\mu(dx)$-қа байланысты $[0,\infty) \times K \times K$ – дағы өту тығыздығы, яғни

$$P\{t,x,\Gamma\} = P_x\{x(t) \in \Gamma\} = \int_{\Gamma} p(t,x,y)\mu(dy)\,,\ \ \Gamma \in \beta(K)),$$

болсын.

Қосымша $x(t)$ процесі келесі түрде *байланысқан* болсын деп ұйғаралық: кез келген $x \in K$ нүктесі және $D \in \beta(K)$ ашық жиыны үшін мына

$$P_x\{x(t_0) \in D\} = \int_{D} p(t_0,x,z)\mu(dz) > 0$$

шартын ($x \in K$ нүктесінен шыққан процесс $t_0 = t_0(x,D)$ уақыт сәтінде D жиынына түсу ықтималдығы оң болатындық шартын) қанағаттандыратын детерминантталған (яғни, кездейсоқ емес) $t_0 = t_0(x,D)$ моменті табылады.

Сонымен бірге біз транспонирленген ядро үшін

$$\int_K p(t,y,x)\mu(dy) \to 1, \quad t \to 0, \tag{3.1.19}$$

шарты орындалады деп ұйғарамыз.

Онда кездейсоқ емес (детерминантталған) уақыт сәті $\hat{t}$ және қатаң оң $\varepsilon : \varepsilon > 0$, тұрақтысы табылады және кез келген $t > \hat{t}$, $x, y \in K$ үшін өту тығыздығы үшін

$$p(t,x,z) \geq \varepsilon > 0$$

теңсіздігі орындалады.

Соңғы қатынас төмендегі бірнеше маңызды салдарларды ($x(t)$-ң эргодикалығы, ОШТ, $x(t)$-ң Харрис қайталануы және т.б.) қамтиды, төмендегілерді қараңыз.

Теорема 3.1.2-нің дәлелдеуіне көшпес бұрын келесі көмекші леммаларды дәлелдейік.

Лемма 3.1.1. Кез келген $x_0, y_0 \in K$ нүктелері және олардың ашық маңайлары

$$\nu_\varepsilon(x_0) = \{z: d(x_0,z) < \varepsilon\}, \quad \nu_\delta(y_0) = \{z: d(y_0,z) < \delta\}$$

үшін $x_1 \in \nu_\varepsilon(x_0)$, $y_1 \in \nu_\delta(y_0)$ нүктелерін және олардың жеткілікті кіші $\nu_{\varepsilon_1}(x_1) \subset \nu_\varepsilon(x_0)$, $\nu_{\delta_1}(y_1) \subset \nu_\delta(y_0)$ ашық маңайлары мен $\tau_1, \theta_1 > 0$ уақыт моменттерін

$$p(\tau_1,x,y) > 0, \qquad x \in \nu_{\varepsilon_1}(x_1), \qquad y \in \nu_{\delta_1}(y_1),$$

$$p(\theta_1,y,x) > 0, \quad y \in \nu_{\delta_1}(y_1) \;\; x \in \nu_{\varepsilon_1}(x_1)$$

шарттары орындалатындай етіп табуға болады.

Осылардың салдары (нәтижесі) ретінде, кез келген $z_1, z_2 \in \nu_{\varepsilon_1}(x_1)$ үшін

$$p(\tau_1+\theta_1,z_1,z_2) = \int_K p(\tau_1,z_1,y)p(\theta_1,y,z_2)\mu(dy) >$$

$$> \int_{\nu_{\delta_1}(y_1)} p(\tau_1,z_1,y)p(\theta_1,y,z_2)\mu(dy) > 0$$

қатынастары дұрыс болатындығын аламыз.

Дәлелдеу. Берілген екі $x_0, y_0 \in K$ нүктелері және олардың маңайлары

$$\nu_\varepsilon(x_0) = \{z: d(x_0,z) < \varepsilon\}, \;\; \nu_\delta(y_0) = \{z: d(y_0,z) < \delta\}$$

үшін, біздің байланыстылық туралы ұйғарымымыз бойынша, $\tau_0 = \tau_0(x_0,y_0,\varepsilon,\delta)$ уақыт сәтін (моментін) таба аламыз және осы τ_0 уақыт моменті үшін

$$P_{x_0}\{x(\tau_0) \in \nu_\delta(y_0)\} = \int\limits_{\nu_\delta(y_0)} p(\tau_0, x_0, z)\mu(dz) > 0$$

теңсіздігі орындалады.

Осы теңсіздіктен және $p(t,x,y)$-тің барлық үш аргументі бойынша үзіліссіздігінен, сәйкес $\varepsilon_1, \delta_1, \Delta_2 > 0$ мен қандай да бір $y_1 \in \nu_\delta(y_0)$ үшін, егер $|s| < \Delta_2,\ x \in \nu_{\varepsilon_1}(x_0),\ y \in \nu_{\delta_1}(y_1)$ болса, онда

$$p(t_0 + s, x, y) > 0 \qquad (3.1.20)$$

болатындығы шығады.

y_1 нүктесі мен оның $\nu_{\varepsilon_1}(x_0)$ маңайы үшін де осы жоғарыда сипатталған үрдісті (процесті) қайталайық. Онда қандай да бір θ_1 уақыт сәті (моменті) үшін

$$P_{y_1}\left(x(\theta_1) \in \nu_{\varepsilon_1}(x_0)\right) > 0,$$

және, оның салдары ретінде, $x_1 \in \nu_{\varepsilon_1}(x_0)$ нүктесі мен $\varepsilon_2, \delta_2, \Delta_2$ тұрақтылары табылады да, $|s| < \Delta_2,\ y \in \nu_{\delta_2}(y_1) \subset \nu_{\delta_1}(y_1),\ x \in \nu_{\varepsilon_2}(x_1) \subset \nu_\varepsilon(x_0)$ үшін

$$p(\theta_0 + s, y, x) > 0 \qquad (3.1.21)$$

теңсіздігі орындалады.

Енді, егер $|s/2| < \Delta_1,\ \Delta_2$ болса, онда алдымен марковтық қасиетті, сосын интегралдың қасиетін пайдаланып, барлық $z_1, z_2 \in \nu_{\varepsilon_2}(x_1)$ үшін былай жаза аламыз:

$$p(\tau_0 + \theta_1 + s, z_1, z_2) = \int\limits_K p\left(\tau_0 + \frac{s}{2}, z_1, z\right) \cdot p\left(\theta_1 + \frac{s}{2}, z, z_2\right)\mu(dz) \geq$$

$$\geq \int\limits_{\nu_{\delta_2}(y_1)} p\left(\tau_0 + \frac{s}{2}, z_1, z\right) \cdot p\left(\theta_1 + \frac{s}{2}, z, z_2\right)\mu(dz) > 0.$$

Дербес, $z_1 = z_2 \in \nu_{\varepsilon_2}(x_1)$ жағдайында, $|s| < min(\Delta_1, \Delta_2)$ үшін мына қатаң теңсіздікті аламыз:

$$p(\tau_0 + \theta_1 + s, z_1, z_1) > 0.$$

Дәлелдеу керегі де осы еді. ■

Лемма 3.1.2. Кез келген $z_1, z_2 \in \nu_{\varepsilon_2}(x_1)$ нүктелері және барлық жеткілікті үлкен $t \geq t_1(\varepsilon_2, \delta_2, \ldots)$ үшін

$$p(t, z_1, z_2) > 0.$$

Дәлелдеу. Қарапайым сандар теориясынан белгілі келесі жайтты (фактыны) қолданалық: егер $a, b > 0$ салыстырмалы түрде жай бүтін сандар болса, онда $A = A(a, b) > 0$ шарты орындалатын A саны табылады және кез келген $n \geq A$ үшін

$$n = ax + by, \quad x, y \geq 0,$$

қатынасы орындалады.

(Шындығында, $A(a, b) = (a - 1)(b - 1)$ болады және бұл тұжырым *Фробениус теоремасы* деп аталады).

Онда, кез келген $n_1,\ n_2$ үшін $T_1 = \tau_0 + \theta_1 + s_1,\ \ T_2 = \tau_0 + \theta_1 + s_2$ деп есептеп, $|s_3| < \Delta_3$ үшін

$$p(n_1 T_1 + n_2 T_2 + s_3) > 0$$

болатынын ескеріп, кез келген $n_1,\ n_2$ үшін қажетті нәтижені аламыз. ■

Біз x, y нүктелері мен олардың $\nu_{\varepsilon_2}(x_1) \subset \nu_\varepsilon(x_0), \quad \nu_{\delta_2}(y_1) \subset \nu_\delta(y_0)$ мейлінше кіші маңайлары үшін $p(t, x, y) > 0$ екенін дәлелдедік.

x_0, y_0 нүктелерінің вариациясы осындай «жақсы» аймақтардың «тығыз фракталдар жиынына» алып келеді. Енді бізге олардың арасындағы жай уақытта «байқалмайтын» байланыстарды түсінуге тырысу керек.

Лемма 3.1.3. Кез келген бекітілген $y, x \in K$ нүктелері үшін келесі шарт орындалатын $t_3(x, y)$ моменті табылады:

$$p(t_3, x, y) > 0.$$

Дәлелдеу. Кері, яғни $p(t, x, x) \equiv 0,\ t > 0$, орындалсын деп ұйғаралық. Онда

$$0 = p(t_1 + t_2, x, x) = \int_K p(t_1, x, z) p(t_2, z, x) \mu(dz).$$

Бекітілген t_2 және x үшін $p(t_2, z, x)$ функциясы z бойынша үзіліссіз. Қандай да бір $z_0 \in K$ нүктесі үшін бұл ықтималдық нөлге тең емес, яғни $p(t_2, z_0, x) > 0$ деп есептейік. Онда қолайлы $\delta > 0$ және кез келген $z \in \nu_\delta(z_0)$ үшін

$$p(t_2, z, x) > 0.$$

Лемма 3.1.2 және (3.1.20) теңсіздікке сәйкес барлық жеткілікті үлкен t үшін

$$p\big(t, x, \nu_\delta(z_0)\big) > 0.$$

Нәтижесінде (3.1.21) формуладағы интеграл оң екенін көреміз, ал бұл біздің $p(t_2, z_0, x) > 0$ ұйғарымына қайшы.

Басқаша айтқанда, кез келген t_2 мен $z \in K$ үшін (3.1.21) мынаны білдіреді:

$$p(t_2, z, x) \equiv 0, \qquad (3.1.22)$$

яғни

$$\int_K p(t_2, z, x)\mu(dz)=0$$

Бұл теорема 3.1.1-дің тұжырымдамасындағы (3.1.19) шартына қайшы. ■

Енді біз теорема 3.1.1 - дің дәлелдеуін аяқтай аламыз: кез келген $(x, y) \in K \times K$ жұбы үшін $t > \hat{t}(x, y)$ үшін $p(t, x, y) > 0$ болатындай $U(x, y)$ ашық маңайы бар екендігі дәлелденді. Ары қарай, $K \times K$ компакт болғандықтан, оның кез келген $K \times K = \bigcup_{x,y} U(x, y)$ бүркемесінен ақырлы санды ішкі бүркемесін таңдап алуға болады, ал бұл бізге қажетті нәтижеге қол жеткізуге мүмкіндік береді.

3.1.3 Хермандер теоремасының қолданылулары

а) $p(t, x, y)$ өту тығыздығының бірқалыпты оң болатындығынан $x(t)$ процесінің эргодикалықтық қасиеті, яғни $x(t)$ процесінің $\mu(dy)$-ға байланысты инвариантты $\pi(y)$ тығыздығының бар болатыны және $p(t, x, y)$ өту тығыздығы осы инвариантты $\pi(y)$ тығыздығына экспоненциалды жинақталатыны шығады:

$$|p(t, x, y) - \pi(y)| \le c_0 e^{-\gamma t}, \ \ c_0, \gamma > 0.$$

Инвариантты үлестірімі $\pi(\cdot)$ бар болатын $x(t)$ процесі экспоненциалды жылдам күшті араластырымды эргодикалық стационар процесс болады.

Нәтижесінде, біз келесідей **күшейтілген үлкен сандар заңын** аламыз:

Егер $f(x) \in L^1(K, \pi(y)\mu(dy))$ болса, онда

$$\frac{1}{t}\int_0^t f\big(x(s)\big)ds \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \int_K f(y)\pi(y)\mu(dy) \quad (\text{Р} - a.\text{д.}).$$

Егер $f(x) = I_\Gamma(x), \ \mu(\Gamma) > 0$ болса, онда

$$\int_0^t I_\Gamma(x(s))ds \sim \int_\Gamma \pi(y)\mu(dy), \ \ t \to \infty.$$

Бұл $x(t)$ процесі Харрис мағынасында оң рекуррентті болатындығын білдіреді.

ә) Орталық шектік теорема. $L^2(K, \pi(y)\mu(dy))$ кеңістігінде

$$f: \int_K f(y)\pi(y)\mu(dy) = 0$$

функцияларының L^2_π ішкі кеңістігін қарастыралық.

Онда

$$E_\pi\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t f\big(x(s)\big)ds\right)^2 \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \sigma^2(f) = \int_{K\times K} f(z_1)Q(z_1,z_2)f(z_2)\mu(dz_1)\mu(dz_2)$$

мұндағы

$$Q(z_1,z_2) = \int_0^\infty (p(s,z_1,z_2) - \pi(z_2))ds\,.$$

Негізінде,

$$E_\pi\left(\int_0^t f\big(x(s)\big)ds\right)^2 =$$

$$= 2\int_K \pi(x)\mu(dx)\int_0^t ds(p(s,x,z_1)f(z_1)\int_K f(z_2)\mu(dz_1)\int_0^{t-s}(p(u,z_1,z_2) - \pi(z_2))ds$$

$$= 2\int_0^t\int_K \mu(dz_1)f(z_1)\int_K Q(t-s,z_1,z_2)f(z_2)dz_2.$$

мұндағы

$$Q(t-s,z_1,z_2) =$$

$$= \int_0^t (p(u,z_1,z_2) - \pi(z_2))du \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^\infty [p(u,z_1,z_2 - \pi(z_2)]du = Q(z_1,z_2).$$

Ядросы $Q(z_1,z_2)$ болатын интегралдық оператор L_π^2-да шенелген опрератор екенін байқалық.

Стандартты пайымдаулар (Деблин мен Колмогоровқа жүгіну арқылы) $f \in L_\pi^2$ үшін

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t f\big(x(s)\big)ds \xrightarrow{law} N(0,\sigma^2(t))$$

жинақталуы дұрыс болатынын көрсетеді.

$f \not\equiv const$ үшін $\sigma^2(t)$ - ның оң болуы туралы сұрақ күрделі сұрақ.

3.1.4 Диффузиялардың Хермандер типті генераторлармен байланыстылығы

Айталық

$$K = K_1 \times K_2, \qquad A = A_1 + Y = \sum_{i=1}^{m_1} X_i^2 + \sum_{j=1}^{m_2} F_j(x,y)\frac{\partial}{\partial y_j},$$

болсын, мұндағы $m_1 = dimK_1,\ m_2 = dimK_2,\quad x \in K_1,\quad y \in K_2,\quad y_j$ $(j = 1,2,\dots,m_2)$- K_2-дегі координаттар. A операторымен байланысқан диффузия $x_t = (b_t, y_t)$ түрінде жазылады, мұндағы b_t- өзгешеленбеген диффузия (K_1- дегі броундық қозғалыс), ал y_t

$$\frac{d}{dt}y_t = \sum_{j=1}^{m_2} F_j(b_t, y_t),\ \ y_t|_{t=0} = y_0,$$

дифференциалдық теңдеуінің шешімі.

Лемма 3.1.4. Айталық, (x бойынша бөлікті - тұрақты)

$$\frac{d}{dt}\hat{y}_t = \sum_{j=1}^{m_2} F_j(x_i, \hat{y}_t),\ \ t \in [t_i, t_{i+1}],\ \ t_0 = 0, x_i \in K_1,$$

теңдеулер жүйесі, мұндағы $i = 0,1,\dots,n$, ал бастапқы $t_0 = 0$ уақыт сәтінде y_0 нүктесінен шыққан шешім $t = t_{n+1}$ уақыт сәтінде $\nu_1 \subset K_2$ маңайының кез келген нүктесіне түсетін, бар болсын.

Онда бастапқы (b_t, y_t) процесі байланыстылық қасиетіне ие болады.

Дәлелдеу. Оң ықтималдықты b_t процесін қарастырайық (b_t өзгешеленген емес): бастапқы сәтте ол x_0 нүктесін шығады, $\leq \delta$ уақыт аралығында ол x_1 нүктесінің ε-аймағына өтеді де сол жерде (δ, t_1) уақыт болады; одан кейін $(t_1, t_1 + \delta)$ уақытта x_2 нүктесінің ε-аймағына өтіп сол жерде $(t_1 + \delta, t_2)$ уақыт болады т.с.с. Сонымен $(t_n, t_n + \delta)$ уақыт аралығында b_t процесі ν_1-ге түсетіндей етіп t_n-ді таңдап алуға болады. Ары қарай, жай дифференциалдық теңдеулер жүйесі шешімінің теңдеулер жүйесінің оң жағынан үзіліссіз тәуелділігі туралы теореманы қолдана отырып, (2.2) теңдеудің оң жағындағы F_j векторлық функциясының шенелген болатынын және ε мен δ параметрлерін (қажет болған жағдайда) мейлінше аз етіп таңдау арқылы, жоғарыда сипатталған жиында және b_t процесінің траекториясының оң ықтималдықы екенін ескере отырып, біз қажетті байланыстың бар екенін көреміз: $(t_n, t_n + \delta)$ уақыт аралығында y_t бастапқы y_0 нүктесінен шығып $D_2 \subset K_2$ –ң қандай да бір нүктесінің ε аймағына өтетіндей оң анықталған t_n–ді таңдап алуға болады. ■

Айталық, енді $K \times S^{\nu-1}$-да берілген (x_t, y_t) процесінің генераторы

$$A = \sum_{i=1}^{\nu} X_i^2 + Y\ ,$$

мұндағы оператор

$$Y = \big((C(x) - (\theta\ {}^*C(x)\ \theta)E)\theta, \nabla_\theta\big),\ \ \theta \in S^{\nu-1}, \qquad (3.1.23)$$

ал * - төңкеру (транспонирлеу) амалы, E - бірлік матрица, $S^{\nu-1} -$ R^{ν}-дегі бірлік сфера, $\nabla_{\theta} -$ θ - бойынша градиент.

Қосымша, $C(x)$ матрицаның элементтері қажетті тегістік шарттарын және өзгешеленетін гипоэллиптикалық операторларды зерттеген кезде әдеттегідей (табиғи түрде) пайда болатын келесі «жалпылама жағдайлар» шарттарын қанағаттандырады деп ұйғаралық:

Шарт I. $K \times S^{\nu-1}$- кеңістігінде $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ $(i = 1,2, \dots, m = \dim K)$ өрістері, (3.1.23) формуласымен анықталған Y векторлық өрісі және мүмкін болатын барлық (3.1.18) түріндегі коммутаторлар арқылы пайда болған Ли алгебрасы $\mathfrak{C}(X_1, X_2, \dots, X_m, Y) -$ ның әрбір $(x, \theta) \in K \times S^{\nu-1}$ нүктесінде максималды өлшемді болады.

Сонымен қатар келесі шарт орындалады деп ұйғарамыз.

Шарт II. Кез келген маңайында $C(x)$ матрицасының (модулі бойынша) ең үлкен меншікті мәнінің нақты бөлігі оң болатын $x \in K$ нүктесі бар болады.

Бұл жерде мынаған назар аударамыз. Айталық, $x_0 \in K$ және λ_0 - бұл $C(x_0) \in SL(\nu, R)$ матрицасының модулі бойынша ең максималды (ең үлкен) меншікті мәні болсын. Онда $|\lambda_0| > 1$ деп есептей аламыз (бұған әруақытта қол жеткізе аламыз, себебі $SL(\nu, R)$ – дегі барлық меншікті мәндері модулі бойынша бірге тең болатын матрицалар жиынының өлшемі $SL(\nu, R)$ группасының өлшемінен аз (кем).

Біз енді марковтық кездейсоқ матрицалардың

$$G_t = \prod_{s=0}^{t} (E + C(b_s)ds)$$

стохастикалық мультипликативтік интегралын

$$\frac{d}{dt} G_t = C(b_t)G_t, \quad G_0 = E. \tag{3.1.24}$$

теңдеуінің шешімі ретінде анықтаймыз.

Сосын кез келген ұзындығы бірге тең (кездейсоқ емес) $\theta_0 \in S^{\nu-1}$ бірлік вектор – бағанға G_t матрицасымен әсер етіп, $G_t\theta_0$ векторын аламыз.

Алынған вектордың евклидтік ұзындығын r_t : $r_t = \|G_t\theta_0\|$, арқылы белгілейміз. $\theta_t = G_t\theta_0/r_t$, $\theta_t \in S^{\nu-1}$, векторын анықтаймыз және θ_t –ны *фаза*, ал r_t-ны *амплитуда* деп атаймыз. θ_t мен r_t процестері b_t, $t \geq 0$, процесінің жеткілікті тегіс және сызықты емес функционалдары болатындары түсінікті.

Лемма 3.1.5. θ_t және r_t процестері келесі теңдеулерді қанағаттандырады:

$$\frac{d}{dt}\theta_t = (C(b_t) - (\theta_t^* C(b_t)\theta_t)E)\theta_t, \quad \theta_t|_{t=0} = \theta_0, \tag{3.1.25}$$

$$\frac{d}{dt}r_t = (\theta_t^* C(b_t)\theta_t)r_t\,, \quad r_0 = 1. \tag{3.1.26}$$

Дәлелдеу.

$$r_t^2 = \sum_{j=1}^{\nu}(G_t\theta_0)_j^2, \;\; \theta_t = G_t\theta_0/r_t\,,$$

болғандықтан, (3.1.24) теңдеуін ескере отырып, былай жаза аламыз:

$$2r_t\frac{d}{dt}r_t = 2\sum_{j=1}^{\nu}(G_t\theta_0)_j(C(b_t)G_t\theta_0)_j\;,$$

$$\frac{dr_t}{dt} = \sum_{j=1}^{\nu}\left(\frac{G_t\theta_0}{r_t}\right)_j\left(C(b_t)\frac{G_t\theta_0}{r_t}\right)_j\cdot r_t = (\theta_t^* C(b_t)\theta_t)r_t.$$

Ары қарай, $r_t\theta_t = G_t\theta_0$ қатынасын пайдаланып, біз келесі теңдеулерді аламыз:

$$\frac{d}{dt}r_t\cdot\theta_t + r_t\frac{d}{dt}\theta_t = C(b_t)G_t\theta_0\,,$$

$$\frac{1}{r_t}\frac{d}{dt}r_t\cdot\theta_t + \frac{d}{dt}\theta_t = C(b_t)\theta_t\,.$$

(3.1.26) теңдеуінің екіншісін ескерсек,

$$\frac{d}{dt}\theta_t(C(b_t) - (\theta_t^* C(b_t)\theta_0)E)\theta_t. \qquad \blacksquare$$

$(b_t\,,\theta_t\,)$ жұбы $K\times S^{\nu-1}$ фазалық кеңістігінде диффузиялық марковтық процесс болатыны түсінікті.

Ары қарай бізге мынандай матрицалық функция (белгілеу) енгізген ыңғайлы:

$$F(x,\theta) = C(x) - (\theta^* C(x)\theta)E. \tag{3.1.27}$$

Онда θ_t фазасы үшін (3.1.25) теңдеу былай жазылады:

$$\frac{d}{dt}\theta_t = F(b_t,\theta_t)\theta_t\,, \quad \theta_t|_{t=0} = \theta_0\,. \tag{3.1.28}$$

$M_{x,\theta}$ арқылы бастапқы $t=0$ уақыт сәтінде (x,θ) нүктесінен шығатын (b_t,θ_t) процесінің барлық траекториялары бойынша алынған шартты математикалық күтімді белгілелік.

Егер A – осы (b_t,θ_t) процесінің инфинитезималдық операторы болса, онда инфинитезималдық оператордың анықтамасы бойынша, жеткілікті тегіс $f(x,\theta)$ функциялары үшін

$$Af(x,\theta) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{M_{x,\theta} f(b_t,\theta_t) - f(x,\theta)}{t}. \qquad (3.1.29)$$

Ары қарай, $f(b_t,\theta_t)$ функциясын $t \to 0$ кезде (x,θ) нүктесінің маңайында $o(t)$ дейінгі дәлдікпен жіктелік те, $M_{x,\theta} f(b_t,\theta_t)$ ($o(t)$ дейінгі дәлдікпен) шартты математикалық күтімін табалық. Оңай тексерілетін қатынастарды пайдалана отырып (төменде δ_{jl}- Кронекер символы, ал $F(x,\theta)$ матрицасы (3.1.27) қатынасымен анықталған),

$$M_{x,\theta}(b_t - x)_j = 0,$$

$$M_{x,\theta}(b_t - x)_j (b_t - x)_l = t\delta_{jl},$$

$$M_{x,\theta}(\theta_t - \theta) = t\, F(x,\theta)\theta + o(t),$$

қатынастарын, сосын (3.1.29) -ден мына лемманың дұрыс болатынын аламыз.

Лемма 3.1.6. (b_t,θ_t) процесінің инфинитезималды операторы

$$A = \frac{1}{2}\Delta_x + \left((C(x) - (\theta^* C(x)\theta)E)\theta, \nabla_\theta\right)$$

операторы болады.

Сонымен, (b_t,θ_t) процесінің инфинитезималды операторы A жеткілікті тегіс функцияларға мына формула бойынша әсер етеді

$$Af(x,\theta) = \frac{1}{2}\Delta_x f(x,\theta) + \left((C(x) - (\theta^* C(x)\theta)E)\theta, \nabla_\theta\right) f(x,\theta).$$

(b_t,θ_t) процесін зерттеудегі негізгі қиындық - оның инфинитезималды операторының өзгешелігінде:

$$dim(K \times S^{\nu-1}) = m + \nu - 1 > m = dimK.$$

Дегенмен, бұл жерде бізге көмекке келетін нәрсе - ол (b_t, θ_t) процесіне Хермандер теориясын қолдануға болады екен.

Ол үшін бізге $K \times S^{\nu-1}$-дегі векторлық өрістердің қандай да бір Ли алгебрасы $\mathfrak{C}$ ны құрастыру керек және осы алгебраның максималды (ең үлкен) өлшемге ие болатынын тексеру керек. Біздің жағдайда бұл алгебраны былайша құруға болады.

Айталық, U- K-дағы қандай да бір карта, ал $x_1, x_2, \dots, x_m$ $(m = dimK)$ U-дағы локалдық (төңіректік) координаттар болсын. $U \times S^{\nu-1}$-да $(x_1, x_2, \dots, x_m; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_\nu)$ локалдық координаттарын және бұл координаттарда

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}(i = 1,2,\dots,m), \quad Y = \left((C(x) - (\theta^* C(x)\theta)E)\theta, \nabla_\theta\right),$$

$m+1$ векторлық өрістерін қарастырайық Онда бізге қажетті алгебра (дәлірек айтсақ, оның $U \times S^{\nu-1}$-ге тарылымы) X_i өрістерімен және (3.1.18) түріндегі барлық мүмкін болатын коммутаторлар арқылы пайда болады. Сондықтан бұл алгебра шарт I де айтылған

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(X_1,\ X_2, \dots, X_m, Y)$$

алгебрасымен бірдей болады және $K \times S^{\nu-1}$ көпбейнесінің әрбір нүктесінде бұл алгебраның өлшемі максималды өлшем $m+\nu-1$–ге тең (біздің жағдайда I шартының бұл тұжырымын тікелей есептеулер арқылы дәлелдеуге болады). Ендеше $(b_t\ , \theta_t\ )$ процесіне Хермандер теоремасын қолдануға болады: $(b_t\ , \theta_t\ )$ процесінің $K \times S^{\nu-1}$ фазалық кеңістігінде $dv \times d\theta$ Лебег өлшеміне байланысты $t > 0,\ \ (x,\theta),(x_1,\theta_1) \in K \times S^{\nu-1}$ аргументтер жиынтығы бойынша (C^∞ класына жататын) $p(t,(x,\theta),(x_1,\theta_1\ )$ өту тығыздығы бар.

Алдағы уақыттағы біздің мақсаттарымыз, яғни жоғарыда айтылған Хермандер теориясын қолдану үшін, бізге A операторын мына түрде жазған ыңғайлы:

$$A = \sum_{i=1}^{m} X_i^2 + Y,$$

мұндағы

$$m = dimK,\quad \theta \in S^{\nu-1},\quad X_i = \frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$Y = \big((C(x) - (\theta^* C(x)\theta)E)\theta, \nabla_\theta\big) = \sum_{j=1}^{\upsilon} (F(x,\theta)\theta)_j \frac{\partial}{\partial \theta_j},$$

ал $F(x,\theta)$ (3.1.27) қатынасы арқылы анықталады.

Ендеше, $x_t = (b_t, \theta_t)$ процесі үшін Лемма 2.2-нің тұжырымы дұрыс (тек қана y_t- ның орнына θ_t-ны, ал $F_j(x,y)$- тің орнына $(F(x,\theta)\theta)_j$ -ді алу керек). Демек, $(b_t\ , \theta_t\ )$ процесі Лемма 2.1 бойынша байланысты процесс және Лемма 2.1 бойынша кез келген $t \geq \hat{t},\ (x_0,\theta_0),(x,\theta) \in K \times S^{\nu-1}$ үшін шенелген өту тығыздығы $p\big(t,(x_0,\theta_0),(x,\theta)\big) > 0$ бар болатын $\hat{t} > 0$ уақыт моменті бар болады. Бұдан қатаң оң анықталған $\pi(x,\theta)$ инвариантты өлшемінің бар болатыны және өту тығыздығының осы инвариантты өлшемге экспоненциалды бірқалыпты жинақталатындығы шығады. Сонымен қатар бұл инвариантты өлшемнің

$$A^*\pi = \frac{1}{2}\Delta_x \pi - \big((C(x) - (\theta^* C(x)\theta)I)\theta, \nabla_\theta\big)\pi = 0,$$

теңдеуінің, мұндағы A^*- A инфинитезималдық операторының түйіндес операторы, теріс емес нормаландырылған жалғыз шешімі болатынын атай кетеміз.

3.1.5 «Ферстенберг типтес» теорема

Ең алдымен біз (3.1.24) жүйесі үшін Ляпунов көрсеткішінің ақиқатдерлік (*а.д.*) бар болатынын дәлелдейміз.

Теорема 3.1.2. Келесі *а.д.* шек

$$\gamma = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln r_t = \int\limits_{K\times S^{\nu-1}} (\theta^* C(x)\theta)\pi(x,\theta)dxd\theta. \qquad (3.1.30)$$

бар болады.

Дәлелдеу. (3.1.26) теңдеуінен келесі теңдікті аламыз:

$$\frac{1}{t}\ln r_t = \frac{1}{t}\int_0^t (\theta_s^* C(b_s)\theta_s)ds.$$

Эргодикалық теорема бойынша, соңғы өрнектің оң жағы интеграл астындағы функцияның орта мәніне инварианттық өлшем бойынша *а.д.* жинақталады, яғни (3.1.30) қатынасы орындалады. ■

Біздің басты мақсатымыз- ол $\gamma -$ ның қатаң оң болатынын дәлелдеу екенін еске саламыз. Ол үшін алдымен келесі маңызды теореманы дәлелдейміз.

Теорема 3.1.3. Кез келген нақты δ үшін

$$\lim_{\mathrm{t}\to\infty} \frac{1}{t} \ln\left(M_{x,\theta} r_t^{\delta}\right) = \mu(\delta)$$

шегі бар болады, мұндағы $M_{x,\theta}$ белгісі (бұрынғыша, (3.1.28) қараңыз) $(b_t\,, \theta_t\,)$ процесінің бастапқы $t = 0$ уақыт сәтінде (x, θ) нүктесінен шығатын барлық траекториялары бойынша алынған шартты математикалық күтімді білдіреді.

$\mu(\delta)$ функциясы δ-ға байланысты тегіс функция болады және келесі қатынастарды қанағаттандырады:

$$\mu(0) = \mu(-\nu) = 0, \qquad \mu(\delta) = \mu\big(-(\nu+\delta)\big);$$

$$\mu(\delta) < 0, \quad \delta \in (-\nu, 0),$$

$$\mu(\delta) > 0, \quad \delta \notin (-\nu, 0);$$

$$\mu'(0) = -\mu'(-\nu) > 0.$$

Дәлелдеу. Кез келген $\delta \in R^1$ үшін $K \times S^{\nu-1}$ кеңістігіндегі үзіліссіз функцияларда (яғни, $C(K \times S^{\nu-1})$ кеңістігінде) анықталған келесідей интегралдық операторлар үйірін енгізелік:

$$P_{t,\delta} h(x,\theta) = M_{x,\theta}\left[e^{\delta\int_0^t (\theta_s^* C(b_s)\theta_s)ds} h(b_t, \theta_t)\right].$$

(b_t, θ_t) марковтық процесс болғандықтан, $P_{t,\delta}$ операторлары (t бойынша) жартылай группа құрайды. Сонымен қатар, бұл операторлар оң, компактты және δ - дан аналитикалық тәуелді. Онда, Фробениус теоремасы бойынша, кез келген $h(x,\theta) \geq 0,\ h(x,\theta) \not\equiv 0,\ h \in C(K \times S^{\nu-1})$ функциялары үшін δ-дан аналитикалық тәуелді мынандай функция бар болады:

$$\mu(\delta) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln\Big(P_{t,\delta} h(x,\theta)\Big).$$

Коши-Буняковский теңсіздігінен $\mu(\delta)$ функциясының (төменге) дөңестігі бірден шығады:

$$\mu\left(\frac{\delta_1+\delta_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\mu(\delta_1) + \frac{1}{2}\mu(\delta_2).$$

$\mu(0) = 0$ болатыны айқын. $\mu(-\nu) = 0$ болатынын көрсетейік.

Кац-Фейнман формуласын қолданып, бұдан көрі жалпылау болатын

$$\mu(\delta) = \mu\big(-(\nu+\delta)\big). \qquad (3.1.31)$$

қатынасын дәлелдейік.

Лемма 3.1.7. Кез келген $f, h \in C(K \times S^{\nu-1})$ үшін әрқашан мына қатынас дұрыс:

$$\int\limits_{K\times S^{\nu-1}} f(x,\theta) P_{t,\theta} h(x,\theta)\, dx d\theta = \int\limits_{K\times S^{\nu-1}} h(x,\theta) P_{t,-(\nu+\delta)}\, f(x,\theta)\, dx d\theta. \qquad (3.1.32)$$

Дәлелдеу. $U(t,(x,\theta)) = P_{t,x}\, h(x,\theta)$ функциясын қарастырайық. Кац-Фейнман формуласы бойынша ол келесі параболалық теңдеуді қанағаттандырады:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta_x U + \big((C(x) - (\theta^* C(x)\theta)E\big)\theta, \nabla_\theta) U + \delta(\theta^* C(x)\theta) U, \qquad (3.1.33)$$
$$U\big(0,(x,\theta)\big) = h(x,\theta).$$

Оған түйіндес теңдеу мына түрде болады:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta_x V - \big((C(x) - (\theta^* C(x)\theta)E\big)\theta, \nabla_\theta) V - (\nu+\delta)(\theta^* C(x)\theta) V\,. \qquad (3.1.34)$$

Жоғарыда біз $S^{\nu-1}$ –де мына қатынас орындалатынын пайдаландық:

$$div_\theta\left[\big((C(x) - (\theta^* C(x)\theta)I\big)\theta\right] = -\,\nu\,(\theta^* C(x)\theta).$$

Кац-Фейнман формуласын тағы бір рет қолданып, (3.1.34) есептің $V\big(0,(x,\theta)\big)=f(x,\theta)$ бастапқы шарты орындалғандағы шешімі мына түрде жазылатынын көреміз:

$$V\big(t,(x,\theta)\big)=\ P_{t,-(\nu+\delta)}\ f(x,\theta).$$

Онда дәлелдегіміз келіп отырған (3.1.31) формуласы (3.1.33) және (3.1.34) тура және түйіндес параболалық теңдеулерінің шешімдері арасындағы белгілі байланыстың қажетті жазбасының бірі болып табылады. ■

Түйіндес жартылай группа да қатаң оң және ол үшін де $\mu(\delta)$ функциясы жартылай группа үшін анықталған сәйкес функциямен бірдей болғандықтан, $h=\ f=1$ болған кезде (3.1.32) формуласынан бірден (3.1.31) формуласын аламыз. Бұдан $\mu(0)=\mu(-\nu)=0$ болатыны шығады.

Енді $\mu(\delta)$ функциясының аналитикалықтығын және төменге дөңес екендігін ескере отырып, біз мынандай балама тұжырымға келеміз:

$$\text{не } \mu(\delta)\equiv 0; \quad \text{не } \begin{cases} \mu(\delta)<0, & -\nu<\delta<0; \\ \mu(\delta)>0, & \delta\notin(-\nu,0); \\ \mu'(0)=-\mu'(-\nu)>0\,. \end{cases}$$

Біздің қарастырып отырған есеп үшін тек екінші жағдай ғана орындалатындығын көрсетейік. Ол үшін қандай да бір (аса үлкен) $\delta>0$ үшін $\mu(\delta)>0$ болатынын тексеру жеткілікті.

Лемма 3.1.8. $\delta>0$ үшін

$$M_{x,\theta}\ r_t^{\delta}>\ B(x,\delta)e^{\delta t} \tag{3.1.35}$$

теңсіздігі орындалатындай $B=B(x,\delta)>0$ табылады.

Лемманың дәлелдеуі II шартынан және келесі екі қарапайым фактілерден оп- оңай шығады:

а) Кез келген $(x,\theta)\,\epsilon\,K\times S^{\nu-1}$, $t>0$ және $\mathcal{D}\subset K\times S^{\nu-1}$ ашық жиыны үшін

$$P_{x,\theta}\ ((b_t,\theta_t)\,\epsilon\,\mathcal{D})\ >0.$$

ә) Кез келген (тегіс шекаралы) $\mathcal{D}\subset K\times S^{\nu-1}$ ашық жиыны және кез келген $(x,\theta)\in\ K\times S^{\nu-1}$ нүктесі үшін

$$P_{x,\theta}\left((b_t,\theta_t)\in\ \mathcal{D},0\ \le\ t\ \le\ T\right)>\ B(x,\theta)e^{-\beta(\mathcal{D})T},$$

мұндағы $B=B(x,\theta)>0,\beta=\beta(\mathcal{D})\ >\ 0.$ ■

Сонымен, (3.1.35) теңсіздігі $\delta\to+\infty$ кездегі $\mu(\delta)\to+\infty$ болатынын қамтамасыз етеді, ал бұл теорема 3.1.2-нің дәлелдеуін аяқтайды. ■

Теорема 3.1.3-тен (3.1.30-теңдігімен анықталған) Ляпуновтың үлкен көрсеткіші γ қатаң оң болатыны шығады: $\gamma = \mu(1) > 0$. Сонымен мынандай теорема дұрыс.

Теорема 3.1.4. (Ферстенберг типтес теорема). Кез келген бекітіліп қойылған бастапқы фаза $\theta_0 \in S^{\nu-1}$ үшін (3.1.30) шегі ақиқат дерлік (*а.ә.*) бар және қатаң оң болады:

$$\gamma = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln\|G_t\theta_0\| > 0 \ \ (а.ә.)$$

3.2 Дискретті кинематикалық динамо, моменттер және фазалық ауысу

Бұл тарауда Ферстенберг типті теоремалардың маңызды дамытылулары және олардың астрофизикадағы фундаменталды фазалық ауысу теориясына қолданылуы қарастырылған: ыстық жұлдыздардың күшті магнит өрістері бар болады, ал суық жұлдыздардың магнит өрісі жоқ. Бұл бөлімді қысқаша физикалық кіріспеден, дискретті кинематикалық динамо моделінің қысқаша сипаттамасынан және унимодулярлы (3×3) матрицалардың $SL(3,R)$ группасына қатысты техникалық тәсілдерді келтіруден бастаймыз.

Тараудың математикалық нәтижелері [101] жұмыста қысқаша баяндалған.

3.2.1 Физикалық кіріспе

Астрофизикадағы кинематикалық динамо модельдері магнит өрісінің өткізгіш сұйықтың (плазма) ағынындағы генерациясын сипаттайды. Егер $\vec{H}(t,x)$ −магнит өрісі, $\vec{V}(t,x)-$ кеңістік және уақыт бойынша стационар сығылмайтын жылдамдық өрісі, $\nu_m -$ магниттік диффузия (ортаның электр кедергісі) болса, онда Максвелл заңдары бойынша (толық ақпаратты [101], [74], [75] жұмыстардан қараңыз)

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{V}, \nabla\vec{H}\right) = \left(\vec{H}, \nabla \overrightarrow{V}\right) + \upsilon_m \Delta\vec{H}, \qquad (3.2.1)$$

$$\nabla\vec{H} = \nabla\vec{V} \equiv 0, \ \ \vec{H}(0,x) = \overrightarrow{H_0}(x) \ (t \geq 0, \qquad x \in R^3),$$

мұндағы Δ – (кеңістіктік координаттар бойынша) Лаплас операторы, ал ∇-(кеңістіктік координаттар бойынша) градиент:

$$\nabla\vec{H} = div\,\vec{H} = \left(\nabla, \vec{H}\right) = 0, \qquad \nabla\,\vec{V} = div\,\vec{V} = \left(\nabla, \vec{V}\right) = 0.$$

Ары қарай, жазуға ыңғайлы болу үшін $\vec{v}(t,x)$ арқылы белгіленетін $\vec{V}(t,x)$ жылдамдық өрісі, яғни $\vec{V}(t,x) = \vec{v}(t,x)$ өрісі уақыт бойынша қысқа корреляцияланған (турбуленттілік) және O^3 айналу группасына байланысты инвариантты (изотропия) $\vec{V}(t,x)$ деп ұйғарамыз.

Ескерту 3.2.1. Я.Б.Зельдовичтің динамо- процесс туралы концепциясына (негізгі көзқарасына) сүйене отырып, магнит өрісі $\vec{H}(t,x)$- тің жылдамдық өрісі $\vec{V}(t,x)$- ке және температура $T(t,x)$ - ке әсерін ескермейміз. Бұл, шын мәнінде, біз $\vec{H}(t,x)-$ тің эволюциясының бастапқы кезеңдері туралы ғана айтып отырмыз дегенді білдіреді.

Параболалық

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}=\frac{1}{2}(2\nu_m)\Delta\vec{H}-(\vec{v},\nabla)\vec{H} \qquad (3.2.2)$$

теңдеуі (қиылған (3.2.1)-теңдеуі) $\vec{H}-$тың кез келген координатасына диффузия коэффициенті $D=2\nu_m$ және жылдамдығы $\vec{v}(t,x)$ болатын Марков процесі ретінде әсер етеді (генерациялайды (3.2.2) теңдеуінің оң жағындағы оператор инфинитезималдық операторы болатын $x(t)$ процесі Итоның келесі стохастикалық дифференциалдық теңдеуінің (СДТ) шешімі болады:

$$dx(t)=\sqrt{2\nu_m}d\vec{W}(t)-\vec{v}\big(t-s,x(s)\big)ds,\ \ 0\le s\le t, \qquad (3.2.2')$$

мұндағы $\vec{W}(t),\ t\ge 0-$ Винер процессі. (3.2.2′) стохастикалық дифференциалдық теңдеуіне (СДТ) сәйкес

$$x(t)=x+\sqrt{2\nu_m}\ \vec{W}(t)-\int_0^t\vec{v}\big(t-s,x(s)\big)ds, \qquad (3.2.3)$$

интегралдық теңдеуінің шешімін Лагранждық траекториялар деп атаймыз.

(3.2.1)-ді шешу үшін мультипликативтік стохастикалық интегралды қамтитын (Кац – Фейнман типтес)

$$G_{ij}\big(0,t,x,x(t)\big)=\prod_{s=0}^{t}\left(\delta_{ij}-\frac{\partial v_j(t-s,\ x(s)}{\partial x_i}ds\right) \qquad (3.2.4)$$

формуласын пайдалануға болады.

Ескерту 3.2.2. Матрицалардың көбейтінділерінің коммутативті еместігіне байланысты біз (3.2.4) шешімді

$$G_{ij}\big(0,t,x,x(t)\big)=exp\left\{-\int_0^t\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\big(t-s,x(s)\big)ds\right\}$$

түрінде жаза алмаймыз.

Енді $Tr\ \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(\cdot)=0$ болатынын байқалық (себебі $div\ \vec{v}=\nabla\vec{v}=(\nabla,\vec{v})=0$), яғни элементтері G_{ij} болатын G матрицасының анықтауышы 1-ге тең:

$$detG=1.$$

Ақыр соңында,

$$\vec{H}(t,x) = M_x G\big(0,t,x,x(t)\big)\vec{H}_0\big(x(t)\big), \qquad (3.2.5)$$

мұндағы M_x белгісі бастапқы уақыт сәтінде x нүктесінен шығатын Винер процесінің барлық траекториялары бойынша шартты математикалық күтім алуды білдіреді.

Біздің барлық есептеулеріміз $\vec{v}(t,x)$ жылдамдық өрісі $x \in R^3$-ке қатысты (x бойынша бірқалыпты) Lip() жеткілікті тегіс функция болатыны туралы әдеттегі ұйғарымдарға негізделген.

Енді $\vec{v}(t,x)$ - уақыт бойынша δ -корреляцияланған гаустық өріс болсын деп ұйғаралық, яғни $\vec{v}(t,x)$ - бұл вектор мәнді "ақ шу" (төменде және бұдан былай қарай $\langle\ \rangle$ бұрыштық жақшалары жылдамдық өрісі бойынша орталандыруды білдіреді) болсын:

$$\langle v_i(t_1,x_1)\ v_j(t_2,x_2)\rangle = \delta(t_1-t_2)B_{ij}(x_1-x_2). \qquad (3.2.6)$$

Одан басқа, $\vec{v}$ өрісі изотропты болады: кез келген (кездейсоқ емес) ортогоналды O матрицасы үшін $law\ (O\vec{v}) = law(\ \vec{v})$, $div\ \vec{v} = (\nabla,\vec{v}) = 0$. Онда $B_{ij}(x_1-x_2)$ кеңістіктік корреляторы тіптен ерекше түрге ие болады ([74], [75] физикалық әдебиеттерді қараңыз).

Бұл жағдайда (3.2.4) мультипликативтік интегралы анықтауыштары 1-ге тең тәуелсіз бірдей үлестірілген кездейсоқ матрицалардың көбейтіндісіне ұқсас болады, яғни

$$G_{ij}[t_1,t_2] = \int_{t_1}^{t_2}\left(\delta_{ij} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\big(t_2-s,x(s)\big)\right)ds \in SL(3,R), \qquad (3.2.7)$$

және Ферстенберг теоремасы бойынша

$$\lim_{t\to\infty}\frac{ln\|G[0,t]\|}{t} \longrightarrow \tilde{\gamma} > 0\ (P-\text{а.д.}). \qquad (3.2.8)$$

Бұл жерде Ляпунов көрсеткіші асимптотикалық түрде $x(\cdot)$ лагранждық траекториясынан тәуелсіз, алайда $\vec{H}(t,x)$ −ты табу үшін Винер өлшемі бойынша математикалық күтім алу, яғни "траекториялар бойынша қосынды алу" қажет, ал бұл айтарлықтай қысқартуларға алып келеді (жақында жарық көрген [98] жұмыстағы ұқсас нәтижені қараңыз).

[74], [75] жұмыстар тек магнит өрісі $\vec{H}(t,x)$- тің екінші моменттерін (корреляциялық функцияларын) талдауды қамтиды. Айтарлықтай жеңілдетілген Z^d- дағы скалярлық есепте [70], [75] (потенциалы «ақ шу» типтес Андерсон моделінде) магнит өрісінің жоғарғы моменттері мен Р-а.д Ляпунов көрсеткіші туралы ақпаратты табуға болады.

Бұл есеп нормасы

$$\|\psi(\cdot)\|^2 = \sum_{x\in Z^d}|\psi(x)|^2\mu(x)$$

түрінде анықталатын $l^2(Z^d, \mu)$ Гильберт кеңістігіндегі стохастикалық дифференциалдық Ито теңдеуі (СДТ) түрінде болады ($\mu(x)$ атомдары $|x| \to \infty$ кезде экспоненциалды кемиді). $u(t,x), t \geq 0,\ x \in Z^d$, скаляр функциясы

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \nu_m \Delta u + \dot{W}(t,x)u(t,x),$$
$$u(0,x) \equiv 1, \qquad (3.2.9)$$

параболалық теңдеуінің шешімі болады, мұндағы Δ - әдеттегі шарбақты (тор көзді) Лапласиан,

$$\Delta\psi(x) = \sum_{x':|x'-x|=1} [\psi(x') - \psi(x)]$$

және $W(t,x), t \in R, x \in Z^d,$ тәуелсіз Винер процесстері болады [89].

Винер процесінің жалпыланған туындысы, яғни $\dot{W}(t,x)$ бір өлшемді скаляр ақ шулар болады. (3.2.9) теңдеуі $l^2(Z^3, \mu)$ −де келесі СДТ-ға эквивалент:

$$du(t,x) = u(t,x)dW(t,x) + \nu_m\big(\Delta u(t,x)\big)dt\,, \qquad (3.2.10)$$

немесе

$$u(t,x) = 1 + \int_0^t u(s,x)dW(s,x) + \nu_m \int_0^t \Delta u(s,x)ds\,.$$

Ито формуласын пайдаланып, моменттік функциялар үшін мынандай теңдеулер табуға болады:

$$m_k(t,x_1,\dots,x_k) = \langle u(t,x_1)\cdots u(t,x_k)\rangle.$$

Дербес жағдайда, егер $k = 1$ болса, онда:

$$\frac{\partial m_1}{\partial t} = \nu_m \Delta m_1, \qquad m_1(0,x) \equiv 1,$$

яғни

$$m_1(t,x) \equiv 1. \qquad (3.2.11)$$

$k = 2$ және $x = x_1 - x_2$ үшін:

$$\frac{\partial m_2(t,z)}{\partial t} = \nu_m \Delta m_2 + \delta_0(x)m_2, \qquad m_2(0,x) \equiv 1. \qquad (3.2.12)$$

(3.2.12)-дегі $\delta -$ функция - бұл (3.2.10)– теңдеудегі $W(t,x)$ – тің жалпыланған потенциалының корреляторы.

Барлық $m_k(t,\cdot)$ моменттік функциялары оң болатынын атай кетеміз. Бұл скаляр (параболалық) жылу өткізгіштіктік теңдеуі үшін максимум принципінің орындалатынын байқатады.

Өкінішке орай, векторлық жағдайда, яғни (3.2.1) Максвелл теңдеуі немесе оның шарбақты (тор көзді) нұсқалары үшін, мұндай принцип орындалмайды. Динамо типті модельдерді зерттеудің негізгі қиындықтары да дәл осыған байланысты.

Үшінші бөлімнің 3.2 пунктінің мақсаты дискретті динамо моделінде ρ параметрі (диффузиялық коэффициент) бойынша фазалық ауысу бар болатынын дәлелдеу. Айта кетелік, $1/\rho$ кері шамасы магынасы бойынша температураны білдіреді, яғни $\rho-$ның кіші мәндері «ыстық», ал үлкен мәндері «суық» жүйелерге қатысты болады.

Фазалық ауысу $\vec{H}(t,x)$ магнит өрісінің (магынасы бойынша өрістің локалдық энергиясын білдіретін) екінші моменті $m_2(t,x)=\langle\left(\vec{H}(t,x),\vec{H}(t,x)\right)\rangle$ үшін тағайындалатын (дәлелденетін) болады.

3.2.2 Дискретті модельдің сипаттамасы

Модельдің фазалық кеңістігі $(t,x),\quad t\in Z_+=\{0,1,\dots\},\quad x\in Z^3$ нүктелерінен және (s,x) нүктесінен $(s-1,x'),\ |x'-x|\le 1,$ нүктесіне бағытталған кесінділерден (қабырғалардан) тұрады.

Бұл графтың бойында уақыт бойынша өспелі, өту ықтималдықтары

$$P\{x(t+1)=x'/\,x(t)=x\}=\begin{cases}1-\rho, & \text{егер } x'=x,\\ \dfrac{\rho}{6}, & \text{егер } |x'-x|=1.\end{cases}$$

шартты ықтималдықтарымен берілетін $x(t)$ симметриялы кездейсоқ кезуін анықтауға болады. Бұл кездейсоқ кезудің Лагранждық траекториялары

$$\xi(s)=x+\xi(t-s),\qquad s\ge 0,$$

түрінде жазылады (кездейсоқ кезу x нүктесінен басталады және біз уақыттың бағытын өзгерттік, яғни

$$\xi(t)=x,\ \ \xi(t-1)=x+\xi(1),\ \ \text{т. с. с.}$$

$A\big((s,y),(s-1,y')\big)$ магниттік потенциалы графтың (s,y) нүктесінен шығып $(s-1,y'),\ |y-y'|\le 1,$ нүктесіне бағытталған қабырғаларында анықталған.

Біз $A\big((s,y),(s-1,y')\big)\in SL(3,R)\quad 3\times 3$ матрицалары әртүрлі қабырғалар үшін тәуелсіз және олар нақты қабырға үшін тәуелсіз кездейсоқ $O_1,\ \Lambda,\ O_2$ көбейткіштері (матрицалары) арқылы келесідей

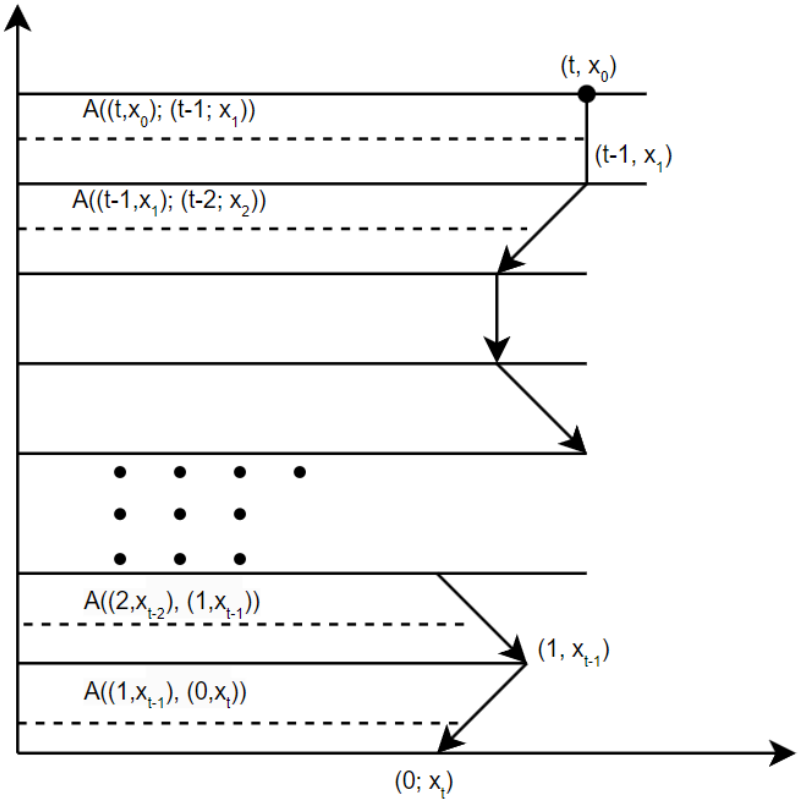
$$A\big((s,y),(s-1,y')\big)=O_1\left((s,y),(s-1,y')\right)\Lambda\, O_2\big((s,y),(s-1,y')\big)\quad (3.2.13)$$

арнайы түрде жазылады деп ұйғарамыз.

Қосымша, тәуелсіз O_1, O_2 матрицалары O^3 ортогоналды группасында бірқалыпты үлестірілген, ал $\Lambda(\cdot,\cdot)$ диагоналдық матрицасы

$$\Lambda = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{a}} \end{bmatrix} \big((s,y),(s-1,y')\big), \quad |y - y'| \le 1, \qquad \det\Lambda = 1, \quad (3.2.14)$$

түріндегі матрица, мұндағы $a(t,x,\omega), t = 0,1,\dots, x \in Z^3$, шамалары (кездейсоқ функциялары) тәуелсіз бірдей үлестірілген, үлестірім тығыздығы шенелген және қандай да бір $\delta_0 > 0$ тұрақтысы үшін $\delta_0 \le a(t,x,\omega) \le 1/\delta_0$ теңсіздігі орындалатын кездейсоқ шамалар.



Сурет 3.2.1

(t,x) нүктесінен ең соңғы $(0,y)$ нүктесіне бағытталған кез келген $\xi(s), 0 \le s \le t,$ лагранждық траектория үшін оның толық магнит өрісі $\vec{H}(t,x)$ - ке қосатын (беретін) үлесін мына формула бойынша анықтаймыз:

$$\vec{H}_\xi(t,x) = A[(t,x_0),(t-1,x_1)] \cdot A[(t-1,x_1),(t-2,x_2)] \cdot \dots \cdot$$
$$\cdot A[(1,x_{t-1}),(0,x_t = y)]\vec{H}_0(y), \qquad (3.2.15)$$

мұндағы $\xi = (x_0, x_1, \dots, y)$ - Лагранждық траектория, $\vec{H}(0,y) = \vec{H}_0(y,\omega) -$ (жалпы алғанда, кездейсоқ) бастапқы магнит өрісі, мәселен $\vec{H}_0(y) = \vec{\eta}(y)$ және $\vec{\eta}(y) -$ мәндері R^3 –те жататын тәуелсіз бірдей үлестірілген $\mathcal{N}(0,I)$ гаустық векторлар жиыны (олар изотропты!).

Егер біз $\xi(s),\ s \in [0,t]$, траекториясын біздің кездейсоқ кезудің кері уақыт бойынша іске асырылуы деп қарастырсақ, онда

$$P(\xi) = (1-\rho)^{n_0}\left(\frac{\rho}{6}\right)^{n_1}, \tag{3.2.16}$$

мұндағы

$$n_0(\xi) = \#\left(s\colon \xi(s) = \xi(s-1)\right),$$

$$n_1(\xi) = \#\ (s\colon |\xi(s) - \xi(s-1)|\ = 1). \tag{3.2.16′}$$

Ақыр соңында, толық магнит өрісі $\vec{H}(t,x)$ үшін біз (анықтама бойынша) мынадай өрнек аламыз:

$$\vec{H}(t,x) = \sum_{y\in Z^3}\ \sum_{\xi:(t,x)\to(0,y)} P(\xi)\vec{H}_\xi(t,x)\ . \tag{3.2.17}$$

Соңғы (3.2.17) – формуланы $\vec{H}(t,x)$ магнит өрісі үшін параболалық теңдеудің дискретті формасы

$$\vec{H}(t,x) = (1-\rho)A\big((t,x),(t-1,x)\big)\vec{H}(t-1,x) +$$

$$+\left(\frac{\rho}{6}\right)\sum_{x'\colon |x'-x|=1} A\big((t,x),(t-1,x')\big)\vec{H}(t-1,x') \tag{3.2.18}$$

арқылы берілген Кац – Фейнман жазылымы ретінде түсінуге болады (1^0 пункттегі үзіліссіз жағдайдағы (3.2.4) формуламен салыстырыңыз, сонымен бірге (3.2.5) – формуланы қараңыз).

(3.2.15), (3.2.17), (3.2.18) формулалары арқылы моменттерді және келесідей $P-$ *а.ә.* Ляпунов көрсеткіштерін зерттеуге болады:

$$\gamma_{2p} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2p}\frac{ln\left\langle\left(\vec{H},\vec{H}\right)^p\right\rangle}{t} \quad (P-а.\text{д.}),$$

$$\tilde{\gamma} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}\frac{ln\left\langle\left(\vec{H},\vec{H}\right)\right\rangle}{t} \quad (P-а.\text{д.}). \tag{3.2.19}$$

Магнит өрісі $\vec{H}(t,x)$ −тің барлық тақ ретті моменттері нөлге тең болатынына назар аударамыз:

$$\langle \vec{H}(t,x) \rangle = 0,$$

$$\langle \vec{H}(t,x) \cdot \left(\vec{H}(t,x), \vec{H}(t,x) \right) \rangle = 0 \text{ (изотропиялық бойынша), т.б.}$$

Ляпунов көрсеткіштерін есептеу бірнеше қарапайым леммаларға негізделген.

Лемма 3.2.1. $S^2 = \{x \in Z^3 : |x| = 1\}$ бірлік сферасында бірқалыпты үлестірілген әрбір $\vec{v}(\omega)$ кездейсоқ векторы үшін

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \xi \\ \sqrt{1-\xi^2} cos\varphi \\ \sqrt{1-\xi^2} sin\varphi \end{bmatrix}, \qquad (3.2.20)$$

жазылымы дұрыс, мұндағы ξ мен φ сәйкесінше $[-1,1]$ және $[0,2\pi]$ аралықтарында бірқалыпты үлестірілген тәуелсіз кездейсоқ шамалар.

Бұл лемма (эквивалентті түрде тіпті Ежелгі Грецияның өзінде белгілі болған) мына тұжырымға эквивалент: S^2-дегі бірқалыпты ықтималдықтық өлшемнің координаттық осьтердің біреуіне (айталық, x осіне) проекциясы [-1, 1]-дегі бірқалыпты үлестірім болады. Бұл үш өлшемді жағдайға ғана тән ерекше нәтиже!

Дәлелдеу. R^3 − дегі сфералық координаттарды қарастыралық:

$$x = sin\theta \cdot cos\varphi,\ y = sin\theta \cdot sin\varphi, z = cos\theta, \theta \in [0,\pi],\ \varphi \in [0,2\pi].$$

S^2-де z- координаттан ғана тәуелді болатын функцияны, яғни $f(z) = f(cos\theta)$ функциясын қарастыралық. Онда, сфералық жүйенің Якобианы $sin\theta$ болғандықтан,

$$\int_{S^2} f(cos\theta) sin\varphi d\varphi d\theta = -2\pi \int_0^{\pi} f(cos\theta) dcos\theta = 2\pi \int_{-1}^{1} f(z)dz =$$

$$= 4\pi \cdot \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(z)dz.$$

Ал бұл сферадағы бірқалыпты өлшемнің $z = [-1,1]$ диаметріне проекциясы бірқалыпты өлшем болатынын және φ бұрыштық координаты S^2 сферасын $z = z_0 = cos\theta_0$ жазықтығымен қиғандағы пайда болатын сфераның әрбір қимасында бірқалыпты үлестірілетіндігін білдіреді. Ал бұл қиманың радиусы $\sqrt{1-z_0^2} = \sqrt{1-cos^2\theta_0} = \sqrt{1-\xi^2}, \xi = cos\theta_0$.

Лемма 3.2.2. Айталық ξ_1, ξ_2– $[0,t]$ уақыт интервалындағы әртүрлі (бірдей болмайтын) екі Лагранж траекториялары болсын. Онда

$$\langle\left(\vec{H}_{\xi_1}(t,x_1),\vec{H}_{\xi_2}(t,x_2)\right)\rangle = 0,$$

яғни бұл траекториялардың $\vec{H}(t,x_1)$, $\vec{H}(t,x_2)$ өрістеріне қосатын (беретін) сәйкес үлестері $\vec{H}_{\xi_1}(\cdot)$, $\vec{H}_{\xi_2}(\cdot)$ *корреляцияланбаған.*

Дәлелдеу. (3.2.5) пен (3.2.18) формулаларын және кез келген (мүмкін кездейсоқ, бірақ $O_2, \widetilde{O_2}$ матрицаларынан тәуелді емес) $h_2, \widetilde{h_2}$ векторлары үшін

$$\langle\left(O_2h_2, \widetilde{O_2}\widetilde{h_2}\right)\rangle = 0$$

болатындығын пайдаланып, егер ξ_1, ξ_2 траекториялары t уақыт сәтінде әртүрлі нүктелерден басталса, онда $\langle\left(\vec{H}_{\xi_1}, \vec{H}_{\xi_2}\right)\rangle = 0$ орындалатынына оңай көз жеткізуге болады. Егер ξ_1, ξ_2 траекториялары бір нүктеден басталса, онда біз олардың траекториялары айырылысқан сәтке дейін күтеміз де, сол траекториялар айырылысқан сәттен бастап алдыңғы дәлелдерді қолданамыз.

Салдар. $\vec{H}(t,x_1)$, $\vec{H}(t,x_2)$, $x_1 \neq x_2$, кездейсоқ векторлары *корреляцияланбаған.*

Келесі теорема 3.2.1 Ферстенберг теоремасының [89] жеке жағдайы, бірақ мұнда изотропты жағдай үшін Ляпуновтың оң көрсеткіші үшін дәл (айқын) формула алынған.

Теорема 3.2.1. (Бұл іс жүзінде Ферстенберг теоремасы [89]).

$A_1, A_2 \ldots, A_n, \ldots$- тәуелсіз бірдей үлестірілген (үлестірімдері (3.2.13), (3.2.14) қатынастарымен берілген) $SL(3,R)$ группасының элементтері болсын.

Онда бекітіліп қойылған $\overrightarrow{e_0} \in R^3$, $|\overrightarrow{e_0}| = 1$, бірлік векторы үшін (төменде және бұдан былай қарай $|\ \ |$ арқылы евклидтік норманы (вектордың ұзындығын) белгіледік)

$$\tilde{\gamma} = \lim_{n\to\infty} \frac{ln\,|A_n \cdot \ldots \cdot A_1\overrightarrow{e_0}|}{n} = \frac{1}{2} ln\,\langle\left(a^2\xi^2 + \frac{1-\xi^2}{a}\right)\rangle > 0, \quad (3.2.21)$$

және де мұнда орта мән $(|\xi|; a)$ – ның бірлескен үлестірімі бойынша, яғни бірлескен үлестірім тығыздығы

$$p(z,a) = 1 \cdot I_{[0,1]}(z)p(a), \quad a \in \left[\delta_0, \frac{1}{\delta_0}\right]$$

функциясы болатын үлестірім бойынша алынады.

Теореманың дәлелдеуі келесі байқалымға негізделген. Айталық, $\vec{X} \in R^3$ векторы A_1 −ден тәуелсіз изотропты вектор болсын. Онда

$$\vec{X} = \left|\vec{X}\right| \cdot \frac{\vec{X}}{\left|\vec{X}\right|} = \left|\vec{X}\right|\overrightarrow{e_0},$$

$$A_1\vec{X} = \left|\vec{X}\right|A_1\overrightarrow{e_0} = \left|\vec{X}\right|O_1\Lambda O_2\overrightarrow{e_0} = \left|\vec{X}\right|O_1\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{a}} \end{bmatrix}\overrightarrow{e_1} =$$

$$= \left|\vec{X}\right|O_1\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{a}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \sqrt{1-\xi_1^2}cos\varphi_1 \\ \sqrt{1-\xi_1^2}sin\varphi_1 \end{bmatrix} = \left|\vec{X}\right|O_1\begin{bmatrix} a\xi_1 \\ \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\sqrt{1-\xi_1^2}cos\varphi_1 \\ \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\sqrt{1-\xi_1^2}sin\varphi_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \left|\vec{X}\right|O_1\cdot\sqrt{a^2\xi_1^2 + \frac{(1-\xi_1^2)}{a}}\overrightarrow{e_2} = \left|\vec{X}\right|\sqrt{a_1^2\xi_1^2 + \frac{(1-\xi_1^2)}{a_1}}\overrightarrow{e_3},$$

$$\left|A_1\vec{X}\right| = \left|\vec{X}\right|\sqrt{a_1^2\xi_1^2 + \frac{(1-\xi_1^2)}{a_1}}, \qquad (3.2.22)$$

жоғарыда біз $a_1 = a$ белгілеуін енгіздік және $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ изотропты бірлік векторлар болады.

Соңғы формуланы итерациялап және айқын белгілеулер енгізіп,

$$|A_n\cdot\ldots\cdot A_1\overrightarrow{e_0}| = \left(\prod_{j=1}^{n}\left(\sqrt{a_j^2\xi_j^2 + \frac{\left(1-\xi_j^2\right)}{a_j}}\right)\right),$$

өрнегін, яғни

$$\frac{ln\langle|A_n\cdot\ldots\cdot A_1\overrightarrow{e_0}|\rangle}{n} = \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n} ln\left\langle\left(a_j^2\xi_j^2 + \frac{\left(1-\xi_j^2\right)}{a_j}\right)\right\rangle$$

қатынасын аламыз. Демек, күшейтілген үлкен сандар заңы бойынша Ляпунов көрсеткіші $\tilde{\gamma}$ $P-а.д.$ бар болады және ол мынаған тең болады:

$$\tilde{\gamma} = \frac{1}{2}ln\left\langle\left(a^2\xi^2 + \frac{1-\xi^2}{a}\right)\right\rangle.$$

Енді Ляпунов көрсеткіші $\tilde{\gamma}$ қатаң оң, яғни $\tilde{\gamma} > 0$ болатынын дәлелдеу қалды. Өз кезегінде, ол үшін кез келген бекітіліп қойылған $a > 0, a \neq 1$ үшін $\tilde{\gamma} > 0$ теңсіздігінің орындалатынын, яғни

$$I(a) = \int_0^1 ln\left(a^2x^2 + \frac{1-x^2}{a}\right)dx > 0, \quad a \neq 1,$$

болатынын тексеру жеткілікті.

Шындығында да, қажетті нәтижеге (теңсіздіктің дұрыстығына) бұл оң өрнекті ($p(a)da$ үлестірімді) a параметрі бойынша интегралдау арқылы көз жеткізуге болады.

Ол үшін екі аналитикалық жағдайды, $a > 1$ және $0 < a < 1$ жағдайларын қарастырайық.

Алдымен, айталық, $a > 1$ болсын. Онда

$$I(a) = \int_0^1 ln\left(\frac{1}{a} + x^2\left(a^2 - \frac{1}{a}\right)\right)dx = \int_0^1 ln\, a^2[cos^2\theta + sin^2\theta \cdot x^2]dx,$$

мұндағы

$$cos^2\theta = \frac{1}{a^3}, \qquad sin^2\theta = 1 - \frac{1}{a^3},$$

яғни

$$I(a) = 2lna + \int_0^1 ln\,[cos^2\theta + sin^2\theta \cdot x^2]dx > 0.$$

Былай жаза аламыз:

$$I(a) = \left[2lna + x(cos^2\theta + sin^2\theta \cdot x^2)|_{x=0}^{x=1} + 2\int_0^1 \frac{x^2 sin^2\theta}{cos^2\theta + x^2 sin^2\theta}\,dx\right] =$$

$$= 2\left[lna - \int_0^1 \frac{x^2 sin^2\theta + cos^2\theta - cos^2\theta}{cos^2\theta + x^2 sin^2\theta}\,dx\right] = 2\left[lna - 1 + \frac{\theta}{tg\,\theta}\right].$$

Бұл жерде, $a > 1$ болуы себепті,

$$tg^2\theta = \frac{sin^2\theta}{cos^2\theta} = a^3 - 1 > 0.$$

Сонымен,

$$I(a) = ln\, a - 1 + \frac{arctg\left(\sqrt{a^3 - 1}\right)}{\sqrt{a^3 - 1}}.$$

$\sqrt{a^3 - 1} = y$ деп белгілелік, яғни $a = (1 + y^2)^{1/3}$ болсын. Онда ($I(a)$-ға әсер етпейтін көбейткіш 2 – ні алып тастасақ)

$$I(a) = \frac{1}{3}ln(1 + y^2) - 1 + \frac{arctg\, y}{y},$$

$$\varphi(y) = yI(a) = \frac{y}{3} ln(1+y^2) - y + arctg\, y\,.$$

Бірақ $\varphi(0) = 0$, сондықтан бізге келесі теңсіздікті тексеру жеткілікті:

$$[\varphi(y)]' = \big(yI(a)\big)' = \frac{1}{3} ln(1+y^2) + \frac{2y^2}{3(1+y^2)} - 1 + \frac{1}{1+y^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\left[ln(1+y^2) - \frac{y^2}{1+y^2}\right] = \frac{1}{3}\left[lnz - 1 + \frac{1}{z}\right] > 0,$$

мұндағы $z = 1 + y^2 > 1$.

Ендеше, $z > 1$ болғанда орындалуы тиіс бізге қажетті $ln\, z > 1 - \frac{1}{z}$ теңсіздігі

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} > 0$$

теңсіздігін $[1, z]$ интервалында z бойынша интегралдағаннан шығады.

Егер $0 < a < 1$ болса, онда

$$I(a) = \int_0^1 ln\, a^2[ch^2\theta - sh^2\theta \cdot x^2]dx,$$

$$ch^2\theta = \frac{1}{a^3}, \qquad sh^2\theta = \frac{1}{a^3} - 1, \;\; 0 < th^2\theta = 1 - a^3 < 1.$$

Жоғарыдағыға ұқсас қарапайым есептеулер $I(a) > 0$ болатынын көрсетеді.

Екінші моментті есептеу өте оңай: ξ кездейсоқ шамасы $[-1, 1]$ аралығында бірқалыпты үлестерелгендіктен,

$$\gamma_2 = \frac{1}{2} ln\, \langle a^2\xi^2 + \frac{1-\xi^2}{a}\rangle = \frac{1}{2} ln\, \langle \frac{a^2}{3} + \frac{2}{3a}\rangle.$$

$ln\, x$ функциясы дөңес болғандықтан, $p, q > 0, p + q = 1$ үшін

$$ln(px_1 + qx_2) > plnx_1 + qlnx_2 = ln\big(x_1^p x_2^q\big).$$

Біздің жағдайда

$$ln\left(\frac{a^2}{3} + \frac{2}{3a}\right) > ln\, a^{2/3}\left(\frac{1}{a}\right)^{2/3} = 0.$$

Жоғарғы ретті моменттер ұқсас бағаланады. ■

Теорема 3.2.2. (Ферстенберг теоремасындағы моменттер). Кез келген жұп бүтін $2p$, $p \geq 1$, үшін

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2pn}ln\langle|A_n\cdot\ldots\cdot A_1\overrightarrow{e_0}|^{2p}\rangle=\gamma_{2p}=\frac{1}{2p}ln\left\langle\left(a^2\xi^2+\frac{1-\xi^2}{a}\right)^p\right\rangle. \quad (3.2.23)$$

Теореманың дәлелдеуі (3.2.23) формуласы (3.2.22) қатынасының айқын салдары болатындығынан бірден шығады. ■

$\left(a^2\xi^2+\frac{1-\xi^2}{a}\right)$ аргументінің үлестірімі абсолютті үзіліссіз болатынын байқап, Ляпунов теңсіздігінен (немесе $ln\,x$ функциясының дөңестігінен)

$$\tilde{\gamma}<\frac{\gamma_2}{2}<\cdots<\frac{\gamma_{2p}}{2p}. \quad (3.2.24)$$

теңсіздіктері орындалатынын аламыз ($\vec{H}(t,x)$ −тің барлық тақ дәрежелі моменттері нөлге тең болатынын тағы да еске саламыз).

(3.2.24) қатынас $\rho=0$ (нөлдік диффузия коэффициенті) болғанда магнит өрісі $\vec{H}(t,x)$ үшін $t\to\infty$ кезде алма – кезектік (*пережемаемость*) құбылысы байқалатынын білдіреді.

3.2.3 Екінші моментті талдау

Теорема 3.2.3. Айталық,

$$m_2(t,x)=\langle(\vec{H}(t,x),\vec{H}(t,x))\rangle=\langle\vec{H}^2(t,x)\rangle,$$

$$\gamma_2=\lim_{t\to\infty}\frac{ln\langle\vec{H}^2(t,x)\rangle}{t} \quad (3.2.25)$$

болсын.

Онда

$$\gamma_2=-ln\left[\left((1-\rho)^2+\frac{\rho^2}{6}\right)\langle\frac{a^2}{3}+\frac{2}{3a}\rangle\right]. \quad (3.2.26)$$

Дәлелдеу. (3.2.18) - ші формуланы пайдалансақ:

$$\vec{H}(t,x)=(1-\rho)A\big((t,x),(t-1,x)\big)\vec{H}(t-1,x)+$$
$$+\frac{\rho}{6}\sum_{x':\,|x'-x|=1}A\big((t,x),(t-1,x')\big)\,\vec{H}(t,\vec{y}).$$

Ары қарай, Лемма 3.2.2 мен теорема 3.2.1-ді (формула (3.2.18)) және ξ кездейсоқ шамасы [-1,1] аралығында бірқалыпты үлестірілгендігін қолдана отырып, біз былай жаза аламыз:

$$m_2(t,x)=\langle\vec{H}^2(t,x)\rangle=(1-\rho)^2\left[\langle a^2\xi^2+\frac{1-\xi^2}{a}\rangle\right]+$$

$$+\frac{\rho^2}{36}\cdot 6\,\langle a^2\xi^2+\frac{1-\xi^2}{a}\rangle\, m_2(t-1,x)=$$

$$=\left[(1-\rho)^2+\frac{\rho^2}{6}\right]\langle\frac{a^2}{3}+\frac{2}{3a}\rangle\, m_2(t-1,x).$$

Бұл формула (3.2.26) қатынасты береді. ■

Теорема 3.2.4. (γ_2 көрсеткіші үшін фазалық өту).

(3.2.26) формуламен анықталған γ_2 көрсеткішін қарастыралық.

Онда, егер

$$\langle\frac{a^2}{3}+\frac{2}{3a}\rangle\ >7 \qquad (3.2.27)$$

болса, γ_2 көрсеткіші қатаң оң болады:

$$\gamma_2>0,$$

яғни кез келген ρ үшін *екінші момент* ($\vec{H}$ өрісінің энергиясы) *экспоненциалды өседі.*

Дәлелдеу. Шындығында да, кез келген ρ үшін

$$(1-\rho)^2+\frac{\rho^2}{6}\geq\frac{1}{7},$$

және осы теңсіздіктің сол жағында тұрған функция өзінің ең минимал мәнін $\rho_0=6/7$ нүктесінде қабылдайды. ■

Мұндай жағдай, яғни (3.2.27) теңсіздігі, не aаса үлкен $(a\gg 1)$ болғанда, немесе $a-$ның мәндері 0-ге жақын (яғни $\frac{1}{a}\gg 1$) болғанда мүмкін болады.

Ары қарайғы есептеулер a кездейсоқ шамасының үлестіріміне байланысты болады. Егер $a(\cdot)$ кездейсоқ шамасының үлестірімі 1-ге жақын маңға шоғырланса, онда 0-ге тым жақын емес ρ үшін екінші момент экспоненциалды түрде кемиді. ρ^*- критикалық мәні a шамасының үлестіріміне байланысты болады (анықталады).

Мынандай ең қарапайым екі жағдайды қарастырайық.

I. $a=const>1$. Жеткілікті аз ρ және кез келген $a>1$ мәндерінде $\gamma_2>0$ болатыны, яғни $t\to\infty$ кезде магнит өрісінің энергиясы экспоненциалды өсетіні түсінікті. Мынаған назар аудара кетелік: ρ- диффузия коэффициентінің, ал $1/\rho-$ температура $T-$ның дискретті түрі (нұсқасы) [101].

Енді γ_2 көрсеткішіне анализ жасалық (талдайық). Бұл γ_2 көрсеткішін анықтайтын (3.2.26) формуладағы бірінші көбейткіш болып тұрған $f(\rho)=(1-\rho)^2+\rho^2/6$ функциясы минималды (ең кіші) мәнін $\rho_0=6/7$ нүктесінде қабылдайды және ол минималды мән мынаған тең:

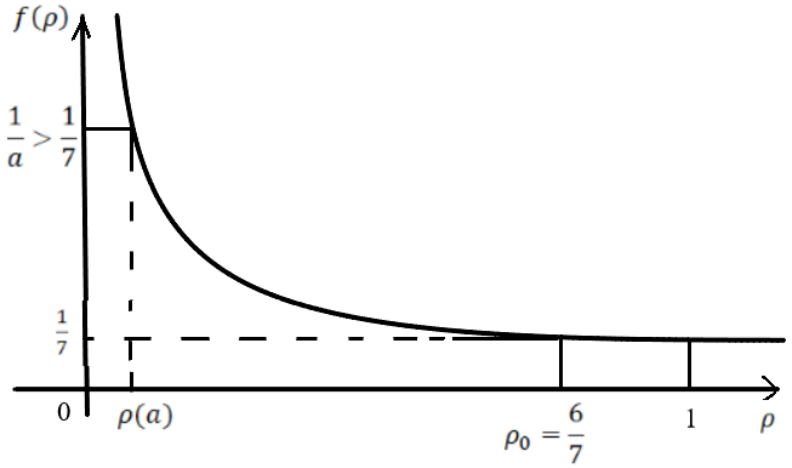
$$\min_\rho f(\rho)=f(\rho_0)=\frac{1}{7}.$$

Ары қарай біз тек физикалық тұрғыдан белгілі қызығушылық тудыратын (мотивацияға ие) $[0\,;6/7]$ интервалын зерттейтін боламыз: $\rho \in [0,\ 6/7] = [0, \rho_0]$.

a_{cr} мәнін келесі теңдеуден табамыз:

$$\frac{a^2}{3} + \frac{2}{3a} = 7.$$

Есептеулер $a_{cr} = 2{,}597$ болатынын көрсетеді. Бұл теңдеудің екінші оң түбірі $\tilde{a}_{cr} = 0{,}095$ (оны біз кейін пайдаланатын боламыз). Егер $a < a_{cr}$ және $\rho < \rho_0 = 6/7$ болса, онда бізде күтілген (бізге қажет болған) фазалық өту бар болады (3.2.2 - суретті қараңыз): «кіші» ρ −лар ($\rho < \rho(a)$) үшін магнит өрісі экспоненциалды өседі; ал $\rho > \rho(a)$-лар үшін магнит өрісі экспоненциалды кемиді. $\rho > 6/7$ және $a > a_{cr}$ жағдайлары "физикалық емес" және олар біздің дискреттеуімізге байланысты пайда болады (атап айтсақ, $a > a_{cr}$ үшін магнит өрісі үнемі экспоненциалды өседі, және т.б.).



Сурет 3.2.2

Сонымен, біз $a > 1$ болатын жағдайды қарастырдық.

Егер $a < 1$ болса, онда жағдай өте ұқсас: $a < a_{cr} = 2{,}597$ шартының орнына $a > \tilde{a}_{cr} = 0{,}095$ деп есептейміз. Онда $\rho < \rho_0 = 6/7$ үшін тағы да сол алдыңғы қарастырылған жағдайға келеміз.

Енді, айталық, $f(\rho) = 1/a$ теңдеуінің түбірі $\rho(a)$ болсын.

Онда $\rho < \rho(a)$ болғанда өріс экспоненциалды өседі, ал $\rho \in [\rho(a), 6/7]$ үшін-экспоненциалды кемиді.

II. Енді симметриялы жағдайды қарастырайық. Айталық, $a(\omega) = \exp(\sigma z)$ болсын, мұндағы z кездейсоқ шамасы $[-1, 1]$ аралығында бірқалыпты үлестірілген кездейсоқ шама: $z \sim uniform([-1, 1])$. Онда

$$\langle \frac{a^2}{3} + \frac{2}{3a} \rangle = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\int_{-1}^{1} e^{2\sigma z} dz + \frac{2}{3}\int_{-1}^{1} e^{-\sigma z} dz\right] =$$

$$= \frac{1}{12\sigma}(e^{2\sigma} - e^{-2\sigma}) + \frac{1}{3\sigma}(e^{\sigma} - e^{-\sigma}) = \frac{1}{6\sigma} sh2\sigma + \frac{2}{3\sigma} sh\sigma = \frac{1}{3}\frac{sh2\sigma}{2\sigma} + \frac{2}{3}\frac{sh\sigma}{\sigma}.$$

Алдыңғы жағдайдағыдай, σ_{cr} шамасын келесі теңдеуден табу қажет:

$$\frac{1}{3}\frac{sh2\sigma}{2\sigma} + \frac{2}{3}\frac{sh\sigma}{\sigma} = 21\,,$$

немесе (Тейлор қатарын пайдалансақ)

$$(2^2 + 2)\frac{\sigma^2}{3!} + (2^4 + 2)\frac{\sigma^4}{5!} + (2^6 + 2)\frac{\sigma^6}{7!} + \cdots = 18$$

$$\frac{\sigma^2}{3!} + \frac{3\sigma^4}{5!} + \frac{11\sigma^6}{7!} + \cdots + \left(\frac{(2^{2n} + 2)}{\sigma}\right)\frac{\sigma^{2n}}{(2n+1)!} + \cdots = 3.$$

Бұл теңдеуді сандық түрде $\sigma_{cr} \in (2, 3)$ үшін шешу қажет, және т. с.с.

Қорытынды

Диссертацияның **бірінші бөлімінде** ықтималдықтар теориясының *классикалық емес*, яғни қосылғыштардың бірқалыпты шексіз аздық шарты талап етілмейтін, шектік теоремаларының бірнеше нұсқалары үлестірім функциялары кеңістігінде енгізілетін Леви ара қашықтығы терминінде сипаттамалық функциялар әдісі мен ілесе жүруші үлестірімдер әдістерін қолдану арқылы дәлелденген және ол теоремалардың Линдеберг – Феллердің орталық шектік теоремаларын маңызды түрде жалпыландыратындықтары көрсетілген;

Диссертацияның **екінші бөлімінде** бірқатар параболалық теңдеулер мен теңдеулер жүйелерінің шешімдерінің теңдеулерге олардың оң жақтарында тұратын операторлар инфинитезималдық операторлары болатын кездейсоқ процесстерді сәйкес стохастикалық дифференциалдық теңдеулердің шешімі ретінде құрастырып, сосын сол процестердің траекториялары бойымен алынған шартты математикалық күтімдер түрінде жазуға болатындығы туралы теоремалар дәлелденген.

Алынған нәтижелер кездейсоқ процесстердің траекторияларының, процестердің стохастикалық интегралдарының және процестен алынған стохастикалық Ито интегралдарының әртүрлі функционалдарының бірлескен сипаттамалық функциясы үшін сәйкес параболалық теңдеулер алуға болатыны туралы тұжырымдарды дәлелдеу үшін пайдаланылған. Кейбір дербес жағдайларда бұл теңдеулердің шешімдерінің Лаплас түрлендіруі коэффициенттері тұрақты кәдуілгі (жай) дифференциалдық теңдеуге келтірілетіні көрсетілген және сәйкес мысалдар келтірілген. Сонымен бірге оң жағы «ақ шу» типтес кездейсоқ процеспен ұйтқытылған бір параболалық теңдеудің шешімінің асимптотикалық нормалдылығы дәдедденген.

Кездейсоқ параболалық теңдеулерді орталандыруға қатысты сұрақтар кездейсоқ дельта– корреляцияланған ағындағы температура өткізгіштік теңдеуі жағдайы үшін қарастырылған және орташа температура мен бір уақыттығы екі нүктедегі орташа температура өрістер үшін сәйкес параболалық теңдеулер қорытылып шығарылған.

Диссертацияның **үшінші бөлімінде** сығылмайтын ағындағы магниттік индукция теңдеуі *кинематикалық қойылым*, яғни жылдамдықтар ағынының ықтималдықтық – статистикалық сипаттамалары белгілі деп есептелінетін, ал магнит өрісінің жылдамдықтар өрісіне кері әсері ескерілмейтін модель аясында зерттеуге арналған.

Бұл жерде ең алдымен бұрындары негізінен физикалық әдебиеттерде енгізіліп, зерттелген жаңаланатын, қысқа корреляцияланған және марковтық тізбе құрайтын сығылмайтын жылдамдық ағындар деп аталған ағындарды белгілі бір мағынада жалпыландыратын *сығылмайтын сызықтық марковтық модель* ($\vec{V}(t,x) = C(b_t)x$ түрінде жазылатын жылдамдықтар өрісі, мұндағы $b_t = b(t)$- броундық қозғалыс, K- көпбейне және $\mathrm{C}(\cdot): K \to SL(\nu, R)$, $SL(\nu, R)$ *– ізі нөлге тең* болатын квадраттық $\nu \times \nu$ матрицалардың сызықтық кеңістігі) *ұғымы* енгізіліп, осы модельдегі магнит өрісі үшін анықталған

арнайы мультипликативтік стохастикалық интеграл арқылы өрнектелетін айқын интегралдық формула алынған.

Үшінші бөлімнің 3.1 пунктінде инфинитезималдық операторы аргументтері бойынша қиғаш туындыларды да қамтитын өзгешеленген (вырожденный) параболалық оператор болатын кездейсоқ процестің қатаң оң өту тығыздығы бар болатындығы туралы тұжырымның *Л.Хермандердің* екінші ретті гипоэллипстік дифференциалдық теңдеулер теориясынан шығатындығын ескере отырып, сығылмайтын сызықтық марковтық модельмен байланысқан стохастикалық мультипликативтік интеграл (матрицант), яғни арнайы марковтық матрицалардың мультипликативтік көбейтіндісі үшін *Ферстенберг типтес теорема* дәлелденген және бұл теореманы магнит өрісінің эволюциясын зерттеуге қолдану мәселелері қысқаша талданған.

Үшінші бөлімнің 3.2 пункті үш өлшемді кеңістіктегі магниттік индукция теңдеуін зерттеуге арналған.

Мұнда ең алдымен *кинематикалық динамоның дискретті моделі* ұғымы енгізіліп, оның ықтималдықтық сипаттамасы берілген және магнит өрісі үшін жоғарыдағыларға ұқсас сұрақтар бұл дискретті модельдегі жылдамдықтар өрісі дельта – корреляцияланған гаустық өріс болатын жағдай үшін зерттелген. Атап айтқанда, алдымен магниттік индукция теңдеуінің оң жағында тұрған оператор инфинитезималдық операторы болатын процесс сәйкес стохастикалық дифференциалдық теңдеудің шешімі болатын процесс (Лагранждық траектория) ретінде анықталған да, магниттік индукция теңдеуінің шешімі Кац – Фейнман формуласының дискретті аналогы арқылы жазылған, ал магнит өрісінің моменттері мен сәйкес Ляпунов көрсеткіштерін зерттеу осы Кац – Фейнман жазылымына сүйене отырып, жүзеге асырылған.

3.2 – пунктте алынған негізгі нәтижелер:

1. Ляпуновтың ең үлкен көрсеткішінің қатаң оң $(\gamma_2 > 0)$ болатындығы дәлелденген (Ферстенберг типтес теорема);

2. γ_2 көрсеткішін табудың дәл (айқын) формуласы жазылған.

3. Магнит өрісінің тақ ретті моменттері нөлге тең болады, ал жұп ретті моменттерді, жеке жағдайда екінші ретті моментті, есептеудің дәл формулалары табылған.

4. γ_2 көрсеткіші үшін фазалық өту құбылысы (магнит өрісі энергиясының экспоненциалды өсу және кему аралықтары бар болатыны) орын алатыны туралы теоремалар дәлелденген және ол аралықтардың айқын түрлері көрсетілген.

ӘДЕБИЕТТЕР

1. *W.Feller.* An introduction to probability theory and is applications. Volum I. – John Wiley and Sons. New York. Chichester. Brisbane. Toronto, 1970. (*В.Феллер.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. -М.: Мир, 1984. т.I. - 752 с.)

2. *W.Feller.* An introduction to probability theory and is applications. Volum II. – John Wiley and Sons, Inc. New York. London. Sidney. Toronto, 1971. (*В.Феллер.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. -М.: Мир, 1986.т.II.- 738 с.)

3. *J.Lamperti*. Probabilyty. –Amsterdam, 1966 (*Дж.Ламперти.* Вероятность. – М.: Наука, 1973. -182 с.)

4. *Ширяев А.Н*. Вероятность 1, 2. - М.: МЦНМО, Москва. -2011.– 840 с.

5. *Rotar V.* Probability Thoery. World Scientific, River Edge, Nj, 2002- 414 p.

6. *Ақанбай Н.* Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика II.- Алматы, Қазақ университеті, 2017. – 458 б.

7. *Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н.* Предельные распределения для сумм независимых случайных величин.-М.:Гостехиздат, 1949.-264с. (Gnedenko B.V., Kolmogorov A.N. Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables. – New York: Addisson–Wesley, 1954.)

8. *Петров В.В.* Суммы независимых случайных величин. - М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. литературы., 1972.- 414 с.

9. *Петров В.В.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. - М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. литературы., 1987.- 320 с.

10. Linnik Yu.V., Ostrovskiy I.V., The Decomposition of Variables and Vectors, AMS, Providence, 1977. (*Линник Ю.В., Островский И.В.*Разложения случайных величин и векторов. - М.: Наука, 1972. - 480 с.)

11. *Золотарев В.М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин. - М.: Наука, 1986. - 417 с.

12. *Stein C.* Approximation Computation of Expectations. Math. Statistics Lecture Notes - Monograph Series. 7. Inst. Math. Statist. - Hayward, Calif., 1986.- 167 p.

13. *Форманов Ш.К.* Метод Стейна- Тихомирова и неклассическая центральная предельная теорема.- Доклады РАН. 2001. Т.376, №4. с.458-461.

14. *E.Lukacs.* Charakteristic functions. Second Edition. Revised and enlarged. Griffin. London. 1969. (*Е.Лукач*. Характеристические функции – М.: Наука, 1979. – 424 б.)

15. *Ротарь В.И.* К обобщению теоремы Линдеберга– Феллера – Математические заметки. – 1975. Т. 18, № 1, с.129 – 135.

16. *Formanov S.K., Akanbay N., A.B.Akhmedov*. On a new proof of the Lindeberg-Feller classical limit theorem - AIP Conf. Proc. 1676, 020046 (2015); http://dx.doi.org/10.1063/1.4930472

17. *Форманов Ш.К., Аканбай Н.* Неклассический вариант слабой сходимости в центральной предельной теореме - ДАН РУз., №4, 2012 , С. 3-6.

18. *Formanov Sh. K.,* The Stein – Tikhomirov Method and a Nonclassical Central Limit Theorem, Math. Notes, **71** (4), 2002, 550–555.

19. *Presman E. L., Formanov Sh. K.,* On Lindeberg – Feller Limit Theorem, Doklady Mathematics, 99 (2), 2019, 204–207.

20. *Аканбай Н., Форманов Ш.К., Форманова Т.А.* О близости распределений случайных сумм - Узбекский математический журнал, № 4, 2013, 140-152.

21. *Formanov Sh. K., Juraev Sh. Yu*., On transient phenomena in branching random processes with discrete time, Lobachevskiy Journal of Mathematics, **42** (12), 2021, 2777–2784.

22. *Bhattacharya R.N., Rango Rao R.* Normal approximation and asymptotic expansions – John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, Toronto, 1975 (Бхаттачария Р.Н., Ранга Рао Р. Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения. М.: Наука, 1982.)

23. *Ақанбай Н., Сүлейменова З.І. Тапеева С.Қ.* Ықтималдықтар теориясының шектік теоремалары – Алматы, Қазақ университеті, 2010 - 296 б.

24. *Аканбай Н., Ахмедов А.Б., Сулейменова З.И.* О некоторых вариантах неклассической центральной предельной теоремы - Вестник КазНУ им. аль-Фараби, серия Математика, Механика, Информатика, N2(77), 2013, с.52-63.

25. *Аканбай Н., Сулейменова З.И.* О вероятностных происхождениях некоторых комбинаторных соотношений - Вестник КазНПУ им. Абая (Серия физико-математические науки), № 2 (50), 2015 г., стр. 14 - 20.

26. *Ақанбай Н., Сүлейменова З.І.,* Ықтималдықтар теориясындағы шектік теоремалардың қолданыстары.- Материалы 47-й научно-педагогической конференций «Повышение конкурентно-способности и экспортного потенциала образовательных программ университетов» в рамках заседания УМО РУМС- Алматы, 26-27 января 2017 г., Книга 4, стр. 30-34.

27. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

28. *Корпусов М.О.* Лекции по параболическим уравнениям второго порядка. – Москва, физфак МГУ, 2023 – 292 с.

29. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов- М.: Наука, 1977.- 588 с.

30. *А.Д.Вентцель.* Курс теории случайных процессов- М.: Наука, 1996. - 400 с.

31. *Булинский А.В, Ширяев А.Н.* Курс теории случайных процессов – М.: Физматлит, 2005 – 408 с.

32. *Скороход А.В., Слободенюк Н.П.* Предельные теоремы для случайных блужданий – Киев, Наукова думка, 1970. – 304 с.

33. *Ito K., MeKean Jr.* Diffusion processes and their sample paths. - Springer - Verlag. - 1965. (*Ито К., Маккин Г.* Диффузионные процессы и их траектории. - М.: Мир, 1968. – 394 с.)

34. *Levi P*. Processus Stochasticues et mouvement Brownien - Deuxieme edition revue et augmentee6 Paris7 - 1965. (*Леви П.* Стохастические процессы и броуновское движение. - М.: Наука. 1972.-376 с)

35. *Бородин А.Н., Салминен П.* Справочник по броуновскому движению. Факты и формулы. – Лань, 2016. – 704 с.

36. *L.B.Koralov, Y.G.Sinai.* Theory of Probability and Random Processes. Springer, 2007.(*Коралов Л.Б., Синай Я.Г.* Теория вероятностей и случайные процессы – М.: МЦНМО, 2014. – 408 с.)

37. *Ақанбай Н.* Стохастикалық анализ негіздері – Алматы, Қазақ университеті, 2023. – 372 б.

38. *Пожидаев А.В.* Асимптотическая нормальность решений параболических уравнений со случайными коэффициентами // Предельные теоремы теории вероятностей – Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ие, 1985. с. 170 – 181. – (Тр./АН СССР. Сиб. Отд-ие. Ин-т математики, т. 3)

39. *Пожидаев А.В.* Асимптотическая нормальность погрешности усреднения параболических краевых задач // Асимптотический анализ распределений случайных процессов. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ие. 1989. – с. 181-193. – (Тр./ АН СССР. Сиб. отд-ие. Ин-та математики, 1989, т. 13)

40. *Аканбаев* (*Аканбай*) *Н*. Об оценке остаточного члена в теореме осреднения для случайных параболических уравнений –Изв. АН КазССР, сер. физ-мат., 1985 – с. 11-15.

41. *Watanabe H.* Averaging and fluctuations for parabolic equations with rapidly oscillating random coefficients – Probab. Th. Rel. Fields. – 1988. V. 77, № 5. – p. 359-378.

42. *Пожидаев А.В*. Асимптотическая нормальность флуктаций при усреднении ква усреднения параболических краевых задач// Асимптотический анализ распределений случайных процессов. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ие. 1989. – с. 181-193. – (Тр./ АН СССР. Сиб. отд-ие. Ин-та математики, 1989, т. 13)

43. *Денисов В.Н.* О поведении решений параболических уравнений при больших значениях времени – УМН, т. 60, вып. 4 (364), 2005, с. 145-212

44. *Аканбай Н., Жолдасова Б.К.* Оң жағы кездейсоқ бір параболалық теңдеу үшін Коши есебі шешімінің асимптотикалық үлестірімі туралы- Зерттеуші-Исследователь, NN 5-6 (73-74), май-июнь 2012, стр. 63-**67**

45. *Аканбай Н., Тулебаев Б.Б., Исмайлова Ж.А.* Бір теңдеудің ықтималдықтық шешімі және оның қолданылулары туралы- Вестник КазНТУ им. К.И.Сатпаева, № 4 (104), 2014 г., стр. 375-382

46. *Аканбай Н., Есімова Ж.Н., Тлесбаева Ж.А.* Бір арнайы түрдегі кездейсоқ параболалық теңдеуді орталандыру- Вестник КазНПУ им. Абая (серия физико-математические науки), № 3 (47), 2014 г., стр. 26-31

47. *Аканбай Н.,* Уақытты кездейсоқ ауыстыру және бір параболалық теңдеу шешімінің асимптотикалық нормалдылығы - Problems of Differential Equations, Analysis and Algebra. VII International Scientific Conference. Procedyngs. -Actobe, 8-9 October, 2015. -p. 7-10

48. *Аканбай Н., Мекебай Н.А., Тапеева С.К.* Об асимптотическом поведении решения задачи Коши одного параболического уравнения со случайными коэффициентами и случайной правой частью. - Вестник КазНИТУ им. Қ.И.Сатбаева («Сатбаев университет»), №4 (134), 2019, с. 571–576

49. *L. V. Bogachev, S. A. Molchanov.* "Mean-field models in the theory of random media. I", *Theoret. and Math. Phys.*, 81:2 (1989), 1207–1214.

50. *L. V. Bogachev, S. A. Molchanov.* "Mean-field models in the theory of random media. II", *Theoret. and Math. Phys.*, 82:1 (1990), 99–107

51. *L. V. Bogachev, S. A. Molchanov.* "Mean-field models in the theory of random media. III", *Theoret. and Math. Phys.*, 87:2 (1991), 512–526 .

52. *A. D. Venttsel', S. A. Molchanov, V. N. Tutubalin.* "Asymptotic problems in probability theory and the theory of random media", *Theory Probab. Appl.*, 35:1 (1990), 87–93.

53. *Аканбай Н., Абибулла А.Б.* Среднее температурное поле в случайном потоке с мгновенной по времени корреляцией - Вестник КазНПУ им. Абая, серия "физико - математические наук", N1(37), 2012г. с. 8-11

54. *Аканбай Н., Ахмедов А.Б., Тапеева С.Қ.* Об осреднении уравнения теплопроводности со случайными дельта-коррелированными по времени коэффициентами и правой частью - Вестник КазНПУ им.Абая (Серия физико-математические науки, №2 (42) 2013 г., С. 18-23.

55. *Аканбай Н., Ахмедов А.Б., Базарбек М.М.* Одновременый двухточечный момент решения уравнения температурапроводности в дельта-коррелированном по времени несжимаемом случайном течении - Зерттеуші - Исследователь, NN 1 - 3 (81-83), январь-март 2013, стр. 84-89

56. *А.С.Монин., А.М.Яглом*. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Часть 1.- М.: Наука, 1965.-640 с.

57. *А.С.Монин., А.М. Яглом*.Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Часть 2.- М.: Наука, 1967.-720 с.

58. *Сулейменова З.И.* О вероятностном представлении решения задачи Коши для одного параболического уравнения и его применениях. - Вестник Кыргызско-Российского Славянского университета – 2016, т. 16, № 9, 25-31

59. *Akanbay N., Suleymenova Z., Tapeeva S.* On asymptotic normality of solutions of the Cauchy problem of a parabolic equation with random right side - ICAAM 2016. Third International Conference on Analysis and Applied Mathematics. Institute of Mathematics and Mathematical Modeling. Almaty, Kazakhstan. The Abstract Book, p. 201

60. *Akanbay N., Suleymenova Z.*. On the probabilistic solution of the Cauchy problem for parabolic equations - Al-Farabi Kazakh National University (Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science), № 2 (94), 2017. - p. 21-34.

61. *Akanbay N., Nurkhanova M.S. Suleimenova Z.I.* On averaging of the equation of thermal conductivity in a random delta-correlated flow - TWMS 2017. VI congress of the Turkic world mathematical society. Octobor, 2-5, 2017. Astana, Kazakhstan. The Abstract Book - p. 287 – 288

62. *Аканбай Н.,Сулейменова З.И.,* Об асимптотических поведениях решений некоторых случайных параболических уравнений - Материалы Международной конференции «Актуальные проблемы чистой и прикладной математики» - Алматы, 22–25 августа 2017. - 87-88 с.

63. *Аканбай Е.Н., Сулейменова З.И., Тапеева С.К.* Асимптотическая нормальность решения параболического уравнения со случайными быстро осциллирующими коэффициентами- Вестник КазНИТУ, 2020. № 6 (142) – с. 572-581

64. *Аканбай Н.,Сулейменова З.И., Тапеева С.К.* О моментных уравнениях температурного поля в случайном потоке с мгновенной по времени корреляцией - Сборник трудов Международной научной конференции "Прикладная математика, управление и информатики", 3-5 октября 2012., Белгород (Россия). Том I, с.16-19.

65. *Аканбай Н., Сулейменова З.И., Тапеева С.Қ.* Об осреднении уравнения температурного поля в дельта – коррелированном по времени случайном течении - Procedings of scientific conference «Actual problems of stochastic analysis» – February 20 – 21, 2021, Tashkent, Uzbekistan. - p.113-116

66. *H.K.Moffatt.* Magnetic Fild Generation in electrically Conducting Fluids. – Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1978.

67. *Yu. B.Zeldovich., A.A.Ruzmaikin., D.D. Sokoloff.* Magnetic Fields in Astrophysics. – Gordon Breach, New York, 1983.

68. *Я.Б.Зельдович., А.А.Рузмайкин., Д.Д.Соколов.* Магнитные поля в астрофизике (второе издание). – Москва – Ижевск, Инст. Компьют. Исслед., 2019.

69. *Ya.B.Zel'dovich, S.A.Molchanov, A.A.Ruzmaĭkin, D.D.Sokolov.* Intermittency, Diffusion and Generation in a Nonstationary Random Medium (second edition) - Reviews in Mathematics and Mathematical Physics, 2015.

70. S. Molchanov. Lectures on random media, in: Lectures on Probability Theory (Saint-Flour 1992), Lecture Notes in Math. 1581, Springer, Berlin (1994), 242–411.

71. *Соколов Д.Д.* Проблемы магнитного динамо – УФН, 2015, т. 185 (6), 643-648.

72. *Попова Е.П.* Современные результаты асимптотических исследований моделей динамо – УФН, 186, 577-596 (2016).

73. *Ya.B.Zel'dovich, S.A.Molchanov, A.A.Ruzmaikin, D.D.Sokoloff.* Intermittency in random media, *UFN*, **152**:1 (1987), 3–32; *Phys. Usp.*, **30**:5 (1987), 353–369

74. *A.A.Ruzmaikin, S.A.Molchanov, D.D.Sokoloff.* Kinematic dinamo in random flow - Usp. Fiz. Nauk . - 1985, т.145, 593-628.

75. *Y.B.Zel'dovich., S.A.Molchanov., A.A.Ruzmaĭkin., D.D.Sokoloff.* Intermittency, diffusion and generation in a nonstationary random medium. - Math. Phys. Rev. 7, Harwood Academic, Chur (1988), 3–110.

76. *Ya.B.Zel'dovich, A.A.Ruzmaikin A.A, S.A.Molchanov, D.D.Sokoloff.* Kinematic dinamo problem in a linear velocity field. FluidMech., 144 (1984), 1-11.

77. *S.A.Molchanov, V.N.Tutubalin.* A linear model for hydromagnetic dynamo and the products of random matrices. - Theory Probab.Appl., 29:2(1985), 231-246.

78. *П.Дитрих.* Среднее магнитное поле в обновляющемся случайном потоке. – Вестник Моск. ун-та, Сер. 1, Матем., 1984, №5, 79-82.

79. *Furstenberg H, Kesten H.* Products of random matrices. Ann. Math. Statist. 31(2): 457-469 (1960).

80. *Furstenberg H.* Noncommuting random products. Trans. Amer. Math. Soc. 1963. 108. 377-428.

81. *Аканбаев Н.* Эволюция магнитного поля в течении Хэббла - "Теория вероятностей, теория сл. проц. и функционал анализ". Изд. МГУ,1985, с. 4-7.

82. *Аканбаев Н.* Об эволюции магнитного поля в течении Хэббла - В сб. "Диф-е урав, функ. анализ и его приложения", Алма -Ата, изд КазГУ, 1989, с. 3-9.

83. *Аканбаев Н.* Турбулентная дифффузия в случайных многомасштабных средах. - "Дифференциальные уравнения, теория функции и их приложения", Алма -Ата, 1986 г.,изд. КазГУ, с. 3-7.

84. *Аканбаев Н.* Уравнение второго момента магнитного поля в многомасштабном течении. - Вестник Моск. Ун-та, Сер.3, 1988, т. 29, №2, с. 15-21.

85. *Аканбаев Н., Абенов Б.К., Утебаев М.Н.* Об уравнениях продольной корреляционной функции магнитного поля в многомасштабном изотропном отражательно-инвариантном течении – Вестник КазГУ, серия математич., № 3, 1995г., с. 18-29.

86. *Аканбаев Н.* Обобщенная версия марковской теоремы Ферстенберга - Известия АН КазССР, сер.физ-мат., № 1, 1990г.,с. 3-6.

87. *A.D.Vircer.* Matrix and operator random products, Teor. Veroyatnost. i Primenen. 24 (1979), no. 2, 361–370.

88. *I. Y. Gol'dsheid, G. A. Margulis.* Lyapunov indices of a product of random matrices - *Russian Math. Surveys*, 44:5 (1989), 11–71.

89. *R.Carmona, S.Molchanov.* Parabolic Anderson problem and intermittency - Mem. Amer. Math. Soc., 108, № 518 (1994).

90. *A. I. Alillueva, A. I. Shafarevich*. Asymptotic Solutions of a Magnetohydrodynamic System which Describe Smoothed Discontinuities. - *Math. Notes*, 99:6 (2016), 795–809 .

91. *A. D. Vircer.* On the simplicity of the spectrum of Lyapunov's characteristic indices of a product of random matrices.TheoryProbab. Appl., 28:1 (1984), 122–135

92. *V.I.Oseledec.* A multiplicative ergodic theorem. Characteristic Ljapunov, exponents of dynamical systems, Trudy Moskov. Mat. Obšč. 19 (1968), 179–210.

93. *Ф.Р.Гантмахер.* Теория матриц – М.: Наука, 1967.

94. *О. В. Мантуров.* Мультипликативный интеграл - Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом., 1990,том 22, 167–215

95. *L.Hörmander.* Hypoelliptic second order differential equations, Acta Math. 119 (1967), 147–171.

96. *Akanbay N., Nurkhanova M.S. Suleimenova Z.I.* Linear model of the hydromagnetic dynamo and multiplicative products of Markov random matrices - TWMS 2017. VI congress of the Turkic world mathematical society. Octobor, 2-5, 2017. Astana, Kazakhstan. The Abstract Book, p. 286 - 287

97. *Аканбай Н., Сулейменова З.И., Тапеева С.Қ.* Эволюции магнитного поля в марковской линейной модели- Материалы Международной научной конференци «Теоретические и прикладные вопросы математики, механики и информатики», 12-13 июня 2019 года, **Караганда, Казахстан, стр. 61 – 62.**

98. *N.Akanbay, S.A.Molchanov, Z.I. Suleimenova.* Theorem of Furstenberg type for multiplicative stochastic integrals. - Random operatore and Stochastic equations., 28:3 (2020), 163-176.

99. *Akanbay N., Suleimenova Z.I., Tapeyeva S.K.* Multiplicative integral and asymptotic analisis of the magnetic field equation in the Marcov lintar model - Abstracts of communications. International conference «Limit theorems of probability theory and mathematical statistics» - September 26-28, 2022, Tashkent, Uzbekistan. - p. 8 – 10.

100. *N. Akanbay., Z.I.Suleimenova., S.K.Tapeyeva.* The multiplicative integral and the evolution of the magnetic field in the Marcov linear model - Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science, 2025, Volume 126, issue 2, Pages 25-40

101. *Н.Аканбай., С.А.Молчанов., З.И.Сулейменова.* Модель кинематического динамо – Успехи математических наук, 79:4 (478), 2024, 171-172. *N.Akanbay., S.A.Molchanov Z.I.Suleimenova.* Model of discrete kinematic dynamo- Russian Mathematical Surveys, 2024, Volume 79, Issue 4, Pages 724–726